Temel Kinezyo-mekanik

Klinik Örnekli Anlatım

Prof. Dr. N. Ekin Akalan
İstanbul Üniversitesi, Sağlık Bilimleri Fakültesi, Fizyoterapi ve Rehabilitasyon Bölümü
İstanbul Üniversitesi, İstanbul Tıp Fakültesi, Ortopedi ve Travmatoloji Anabilim Dalı,
Yürüme Analiz Laboratuvarı, İstanbul

Prof. Dr. Yener Temelli
İstanbul Üniversitesi, İstanbul Tıp Fakültesi
Ortopedi ve Travmaoloji Anabilim Dalı, İstanbul

İSTANBUL TIP KİTABEVLERİ

©İstanbul Medical Yayıncılık *BİLİMSEL ESERLER* dizisi
Temel Kinezyo-mekanik Klinik Örnekli Anlatım
Editörler: N. Ekin Akalan, Yener Temelli

1. Baskı 2017

ISBN 978-605-9528-02-3

Yasalar uyarınca, bu yapıtın yayın hakları
İstanbul Medical Sağlık ve Yayıncılık Hiz. Tic. Ltd. Şti.'ye aittir.
Yazılı izin alınmadan ve kaynak olarak gösterilmeden,
elektronik, mekanik ve diğer yöntemlerle kısmen veya tamamen kopya edilemez;
fotokopi, teksir, baskı ve diğer yollarla çoğaltılamaz.

2017 İstanbul Medical Sağlık ve Yayıncılık Hiz. Tic. Ltd. Şti.
34104, Çapa-İstanbul-Türkiye
www.istanbultip.com.tr
e-mail: info@istanbultip.com.tr

MAĞAZALARIMIZ

ÇAPA/MERKEZ	KADIKÖY	KONYA
Turgut Özal Cad. No: 4/A	Rasimpaşa Mah. Teyyareci Sami	İhsaniye Mah. Tacülvezir
Çapa-İST.	Sok. No: 13 Dükkan 11-12	Sk. No: 1/A Selçuklu-KONYA
Tel: 0212.584 20 58 (pbx) 587 94 43	Kadıköy-İST	Tel: 0332.351 32 53
Faks: 0212.587 94 45	Tel: 0216.336 20 60	

UYARI

Medikal bilgiler sürekli değişmekte ve yenilenmektedir. Standart güvenlik uygulamaları dikkate alınmalı, yeni araştırmalar ve klinik tecrübeler ışığında tedavilerde ve ilaç uygulamalarındaki değişikliklerin gerekli olabileceği bilinmelidir. Okuyuculara ilaçlar hakkında üretici firma tarafından sağlanan her ilaca ait en son ürün bilgilerini, dozaj ve uygulama şekillerini ve kontrendikasyonları kontrol etmeleri tavsiye edilir. Her hasta için en iyi tedavi şeklini ve en doğru ilaçları ve dozlarını belirlemek uygulamayı yapan hekimin sorumluluğundadır. Yayıncı ve editörler bu yayından dolayı meydana gelebilecek hastaya ve ekipmanlara ait herhangi bir zarar veya hasardan sorumlu değildir.

Yayına hazırlayan	İstanbul Medical Sağlık ve Yayıncılık Hiz. Tic. Ltd. Şti.
Yayıncı sertifika no	12643
İmy adına grafiker	Mesut Arslan
Editörler	N. Ekin Akalan, Yener Temelli
Kapak	İmy Tasarım
Baskı ve cilt	**Vizyon Basımevi** İkitelli Org. San. Bölg. Deposite İş Merk. A 6 Blok Kat: 3 No: 309 Başakşehir / İST. Tel: 0212 671 61 51 Fax: 0212 671 61 52

Online Alışveriş
istanbultip.com.tr
Satış Hattı
0506 866 97 01

Yazarlar

Prof. Dr. N. Ekin Akalan (Editör)
İstanbul Üniversitesi, Sağlık Bilimleri Fakültesi,
Fizyoterapi ve Rehabilitasyon Bölümü
İstanbul Üniversitesi, İstanbul Tıp Fakültesi, Ortopedi ve
Travmatoloji Anabilim Dalı, Yürüme Analiz Laboratuvarı

Prof. Dr. Yener Temelli (Editör)
İstanbul Üniversitesi İstanbul Tıp Fakültesi,
Ortopedi ve Travmaoloji Anabilim Dalı, İstanbul

Uzm. Dr. Turgut Akgül
İstanbul Üniversitesi, İstanbul Tıp Fakültesi
Ortopedi ve Travmaoloji Anabilim Dalı, İstanbul

Yrd. Doç. Dr. Yıldız Analay Akbaba
İstanbul Üniversitesi, Sağlık Bilimleri Fakültesi,
Fizyoterapi ve Rehabilitasyon Bölümü, İstanbul

Prof. Dr. Salih Angın
Dokuz Eylül Üniversitesi, Fizik Tedavi ve Rehabilitasyon
Yüksek Okulu, Protez-Ortez Anabilim Dalı, İzmir

Doç. Dr. Yunus Ziya Arslan
İstanbul Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi,
Makine Mühendisliği Bölümü, İstanbul

Prof. Dr. Ata Can Atalar
İstanbul Üniversitesi İstanbul Tıp Fakültesi
Ortopedi ve Travmatoloji Anabilim Dalı, İstanbul

Uzm. Dr. Ali Erşen
İstanbul Üniversitesi İstanbul Tıp Fakültesi,
Ortopedi ve Travmatoloji Anabilim Dalı, İstanbul

Yrd. Doç. Dr. Zeynep Hoşbay
Bezmialem Vakıf Üniversitesi Sağlık Bilimleri Fakültesi
Fizyoterapi ve Rehabilitasyon Bölümü, İstanbul

Dr. Fzt. Ebru Kaya Mutlu
İstanbul Üniversitesi, Sağlık Bilimleri Fakültesi,
Fizyoterapi ve Rehabilitasyon Bölümü

Araş. Gör. Faruk Örteş
İstanbul Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi,
Makine Mühendisliği Bölümü, İstanbul

Prof. Dr. Arzu Razak Özdinçler
İstanbul Üniversitesi, Sağlık Bilimleri Fakültesi,
Fizyoterapi ve Rehabilitasyon Bölümü, İstanbul

Dr. Fzt. Safiye Özkan
İstanbul Üniversitesi, Plastik, Rekonstrüktif ve
Estetik Cerrahi Anabilim Dalı, El Cerrahisi Bilim Dalı,
İstanbul

Önsöz

Biyomekanik ve kinezyoloji her zaman klinisyenleri etkileyen iki önemli alan olmuştur. Bu alanların konusu açıldığında, alanda çalışan klinisyenler (fizyoterapistler, ortopedist ve plastik cerrahlar vs.) neredeyse mühendisler kadar heyecan duyar. Aslında bu heyecan, "ben mühendismiyim biyomekaniği nasıl anlayayım?" veya "zaten insan gibi tamamen bilinmezler ve lineer olmayan ilişkilerle dolu bir yapıyı nasıl anlayabilirim ki?", "zaten en son lisede matematik, fizik görmüştüm… yıllar geçti" gibi düşüncelerle baskılanır ve bir kenara itilir. Bu kitap aslında anatomide öğrendiğimiz kas-iskelet sisteminin, hareketi nasıl oluşturduğunu ve bu sistemde bir problem olduğunda, problemin harekete nasıl yansıdığını, bir klinisyenin en rahat anlayacağı örneklerle açıklamaktadır.

Kitap bölüm yazarlarımız, uzun yıllardır klinikle iç içe olduklarından, hakim oldukları bölge anatomisini, bu bölgenin günlük yaşamdaki kullanım şeklini ve bu anatomideki değişikliklerin normal harekete olan yansımaları konusunda derin tecrübeye sahiptir. Eskilerin dediği gibi, bir konuyu iyi bilmek, onu ne kadar iyi özetlediğiniz ile ilişkilidir. İşte kitabımızın bölüm yazarları, uzun yıllardır klinik tecrübelerinin yanında, yıllarca stajyer kabul ettiklerinden ve uzman oldukları alan ile ilgili uzun zamandır ders verdiklerinden, ulusal-uluslararası bilimsel yayın yaptıklarından, konunun klinisyenlerce kolay anlaşılması ve örneklerle pekiştirilmesi konusunda hiç güçlük çekmemişlerdir.

Dolayısıyla bu kitap insan hareketini anlamak, incelemek, problemleri konusunda temel bir fikre sahip olmak isteyen öğrenciler, fizyoterapistler, iş-uğraşı terapistleri, ergoterapistler, ortopedist, ve kas iskelet sistem problemleri üzerine çalışan tüm sağlık çalışanlarının faydalı bulacağı bir kaynak olma amacı taşımaktadır.

Kitabımızın bölümleri yoğun fonksiyonel anatomi bilgilerini temel alarak hareketin özelliklerini incelediğinden, özellikle bu alanda yeni başlayanlar için, kitabımızdaki bölümleri pekiştirmek adına bir anatomi atlasından yardım almalarının yararlı olacağı düşüncesindeyiz. Özellikle üç-boyutlu anatomi atlasları ilgilenilen bölümdeki hareketi oluşturan öğeleri anlamda etkili olacaktır.

Boğaziçi Üniversitesi, Biyomedikal Mühendisliği Enstitüsü, Biyomekanik Bölümü ile birlikte çalışmaya başladığımızdan beri, mühendislik alanı ile klinik tıp bilimleri arasında köprü olmak en önemli amacımız olmuştur. Bu dönem, mühendislerin ne büyük işler yaptığını, ancak klinikte onlardan ne kadar az yararlandığımızı anlamamızda çok faydalı oldu. Bu nedenle, kitabımız çok çalışıp, birçok innovasyon girişiminde bulunan ve yaptıklarının klinikte ne kadar yararlı olacağının hayalini kuran mühendislerin de faydalanabileceği önemli bir kaynak kitap niteliğindedir.

Prof. Dr. Fzt. N. Ekin Akalan
Prof. Dr. Yener Temelli

Prof. Dr. N. Ekin Akalan'ın Özgeçmişi

Prof. Dr. Fzt. N. Ekin Akalan *1995 yılında İstanbul Üniversitesi İstanbul Tıp Fakültesi Fizik Tedavi ve Rehabilitasyon Bölümü'nden birincilikle mezun olduktan sonra yüksek lisans eğitimini, 1991-1996 yılları arasında, İstanbul Üniversitesi Sağlık Bilimleri Enstitüsü, Çocuk Sağlığı ve Hastalıkları Anabilim Dalı'nda tamamlamıştır. 2000-2007 yılları arasında, Boğaziçi Üniversitesi Biyomedikal Mühendisliği Enstitüsü, Biyomekanik Bölümünde doktora eğitimini tamamlamış ve Doktora tezini insan yürüme biyomekaniğinin, kas-iskelet sistem model simülasyonu üzerine yapmıştır.*

1997-1998 yıllarında Harvard Medical School, Massachusetts General Hospital, Biomotion Laboratory'de haftada 40 saat klinik ve araştırma hastalarının değerlendirmesinde gözlemcilik yapmış ve veri analizinde bulunmuştur. Bu dönemde hareket analizi ile ilgili kursları tamamlamış ve yürüme analizi ile ilgili bilgi ve tecrübesini arttırmıştır.

İstanbul Üniversitesi, Çocuk Sağlığı ve Hastalıkları Anabilim Dalı, Fizyoterapi Ünitesinde Çocuk fizyoterapisti olarak çalışmış ve 2006 yılında Bobath Terapisti unvanını almıştır. Aynı üniversitede 2010 yılında Yardımcı Doçent olmuş, 2011 yılında Doçent, 2016 yılında Profesör ünvanı almıştır.

Bu dönemde yurt dışında çalışmalarına devam etmiştir; 2004 yılında Sinai Hospital, A LifeBridge Health Center, Wesserman Gait Anlaysis Laboratory'de Anil Behave ve Roland Starr ME ile, 2014 yılında Roessingh Rehabilitation Center, Holandada Dr. Anand Nene ile, 2015 yılında Nemours/Alfred I. duPont Hospital for Children'da Prof. Dr. Freeman Miller ile yürüme analiz üzerine araştırma yapmak üzere bulunmuş ve çalışmalar yürütmüş. İstanbul Üniversitesi, Sağlık Bilimleri Fakültesi, yönetim kurulu üyeliği görevinde de bulunan N. Ekin Akalan'ın çalışmaları pediatrik rehabilitasyon, pediatrik nöro-ortopedi, serebral palsi, üç boyutlu muskulo-skeletal model simülasyonu ve nöro-müsküler yürüme bozuklukları konularındadır. Ayrıca Türkiye Fizyoterapistler Derneği, European Society for Movement Analysis in Adults and Children (ESMAC), Gait and Clinical Movement Analysis Society (GCMAS), Australian & New Zealand Society of Biomechanics (ANZSB), İ.Ü. Fizyoterapi ve Rehabilitasyon Mezun ve Mensupları Derneğii üyesidir.

Prof. Dr. Nazif Ekin Akalan, halen İstanbul Üniversitesi Sağlık Bilimleri Fakültesi Fizyoterapi ve Rehabilitasyon Bölümü'nde öğretim üyeliği yapmakta ve 2003 yılından bu yana İstanbul Üniversitesi İstanbul Tıp Fakültesi Ortopedi ve Travmatoloji Anabilim Dalı Yürüme Analiz Laboratuvarı'nda müdürlük yapmakta ve çalışmaktadır.

Prof. Dr. Yener Temelli'nin Özgeçmişi

1950 yılında Trabzon Sürmene'de doğan Dr. Yener Temelli ilk öğretimini Sultan Tepe Üsküdar ilk okulunda, orta öğrenimini Kadiköy ortaokulunda, lise öğrenimini 1967 yılında Erzurum Lisesinde tamamlamıştır. 1974 yılında İstanbul Tıp Fakültesi'nden mezun olmuştur. Askerlik görevini tamamladıktan sonra, 1976 yılında İstanbul Tıp Fakültesi'nin Ortopedi ve Travmatoloji Anabilim Dalı'nda uzmanlık eğitimine başlamıştır. 1980 yılında uzman olan Dr. Yener Temelli, 1985 yılında doçent, 1993 yılında profesör ünvanı almıştır. Halen aynı fakültede profesör olarak görev yapmaktadır.

Çalışmaları genel ortopedi, serebral palsi, spina bifida ve diğer nöromüskuler hastalıklar konularında yoğunlaşan Profesör Yener Temellinin, bir çok kitap bölüm yazarlığı yanında yoğun klinik tecrübesi bulunmaktadır. Büyük kısmı deneysel çalışma olmak üzere 30'un üzerinde uluslararası yayını ve 100'ün üzerinde uluslararası atıfı bulunmaktadır. ABD ve İngiltere (Birmingham), Almanya da dahil olmak üzere ortopedi alanındaki başarılı kurumlarda değişen sürelerde gözlemci hekim olarak bulunmuştur.

3 kez, 5.5 yıl süreyle İstanbul Tıp Fakültesi Yönetim Kurulunda ve Ortopedi ve Travmatoloji Yardım Derneği yönetim kurulunda görev almıştır. Prof. Dr Yener Temelli, TOTBİD, TTB İstanbul Tabib Odası, Türk Ortopedi ve Travmatoloji Derneği, Türk Ortopedi ve Travmatoloji Yardım Derneği, American Academy of Orthopaedic Surgeons (AAOS), AACPDM, Büyük Klüp Derneği ve Fenerbahçe Spor Klübu üyeliği yapmıştır. Hocamız ayrıca, 8000'in üzerinde hastası olan, Türkiye'nin en yoğun hizmet veren Yürüme Analiz Laboratuvarlarından biri olan İstanbul Üniversitesi, Yürüme Analiz Laboratuvarının kurucusudur ve halen yürüme patomekaniği konusunda birçok çalışmayı yürütmekte ve danışmanlık yapmaktadır.

Teşekkür

Kitabımızın sizlerle buluşmasında; nazik ve ısrarlı tavırları, sabırlı davranışları nedeniyle İstanbul Tıp Kitabevi'ne, bölümlerin imla hatalarının düzeltilmesindeki hızlı ve detaycı yardımıyla Fzt. Kübra Önerge'ye, kitabımızın hayata geçmesini sağlayan değerli yazarlarımıza, hayat görüşümün gelişmesinde ve akademik olgunlaşmamda çok emeği ve desteği bulunan Prof. Dr. Yener Temelli'ye, son olarak bu yoğunluktan halini hatırını soramadığım arkadaşlarıma ve bana yıllardır sabır gösteren ve destekleyen aileme ve eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İçindekiler

Bölüm 1. **Biyomekanik Uygulamalar İçin Temel Mekanik** 1
Yunus Ziya Arslan, Faruk Örteş

Bölüm 2. **Omuz Biyomekaniği** 83
Ata Can Atalar, Ali Erşen

Bölüm 3. **Dirsek Eklemi Kinezyolojisi ve Biyomekaniği** 93
Zeynep Hoşbay

Bölüm 4. **El ve El Bileği Biyomekaniği** 109
Safiye Özkan

Bölüm 5. **Servikal Omurga Biyomekaniği** 137
Ebru Kaya Mutlu

Bölüm 6. **Torakal Bölge Biyomekaniği** 161
Yıldız Analay Akbaba

Bölüm 7. **Lomber Bölge Biyomekaniği** 193
Arzu Razak Özdinçler

Bölüm 8. **Kalça Eklemi Biyomekaniği** 213
Yener Temelli, Turgut Akgül

Bölüm 9. **Diz Eklem Biyomekaniği ve Kinezyolojisi** 223
N. Ekin Akalan

Bölüm 10. **Ayak Bileği ve Ayak Kompleksi** 257
Salih Angın

Bilinmeyen Kelimeler 303

Bölüm 1

Biyomekanik Uygulamalar İçin Temel Mekanik

Yunus Ziya Arslan, Faruk Örteş
İstanbul Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, İstanbul

Temel Biyomekanik Kavramlar

Bu bölümde verilmesi planlanan temel mekanik bilgisinden önce biyomekanik kavramı, konusu ve içeriğinden bahsedilmesi faydalı olacaktır. Biyomekanik, köken itibariyle canlı anlamına gelen "biyo" kelimesi ile temel olarak cisimlerin kuvvet altındaki davranışlarını inceleyen bilim dalının ismi olan "mekanik" kelimelerinin birleşimidir. Terminolojide biyomekanik kavramı, canlı sistemlerin mekanik kurallar ile incelenmesini ifade eder. Bu bölümde, canlı sistemler olarak kastedilen insan vücududur; ancak diğer birçok kaynakta başka canlıların da mekanik analizleri mevcuttur (1). Biyomekaniğin yıllar içinde gelişimi, insan vücudunun durağan veya hareket halinde hangi tür etkilere maruz kaldığını ve bu etkilerin nasıl ele alınması gerektiği konusunda önemli çözüm metotları ortaya çıkmasını sağlamıştır (2). Örneğin, merdivenden yukarı çıkan bir insanın vücudu ile ilgili olarak,

- Eklemlerdeki hareketin karakteristiği ve moment miktarları,
- Vücudun adımlar vasıtasıyla gerçekleştirdiği yer değiştirme için gerekli kas kuvvetleri,
- Vücudun dengesinin sağlanma biçimi,
- Sert (ör. kemik) ve yumuşak (ör. kas, ligament) dokular üzerinde oluşan etkiler

Başta olmak üzere bir çok vücut faaliyeti biyomekanik disiplininin inceleme konusudur (3). Vücudun temel fonksiyonları (ayakta durma, yürüme, koşma vb.) anlaşıldıkça biyomekanik alanının temel amaçlarından olan tedavi, rehabilitasyon ve yardımcı araçların tasarım ve üretimi daha kolay hale gelir. Bunlarla beraber biyomekaniğin oldukça geniş bir uygulama alanı mevcuttur. Fiziksel tedavi, spor biyomekaniği, ortopedi, kinezyoloji, yürüme analizi, protez ve ortez gibi yardımcı cihaz tasarımı gibi alanlarda da biyomekanik metodolojisi uygulanmaktadır.

Anatomik Düzlemler ve Eksenler

İnsan vücudunun duruş ve hareketlerini tanımlamak için evrensel olarak kullanılan eksenler, düzlemler ve bir takım pozisyon terimleri mevcuttur. Bu temel terimlerin bilinmesi biyomekanik sistem ve problemlerin ele alınmasını kolaylaştırır.

Anatomik Duruş: Şekil 1'de görüldüğü gibi insan vücudunun ayakta, yüz ve al avuç içleri (avuç açık şekilde) bize dönük, kolları yana açık ve ayakları birbirine değen pozisyonudur.

Sagital Düzlem: Kafatasının sagital suturundan geçen ve vücudu sağ ve sol olarak iki bölgeye ayıran düzlemdir. Şekilde kırmızı kesikli çizgi ile gösterilen düzlemin vücudu simetrik iki ayrı parçaya böldüğü varsayıldığı için median düzlem olarak da bilinir.

Coronal (frontal) Düzlem: Vücudu ön (anterior) ve arka (posterior) olmak üzere iki bölgeye ayıran ve şekilde siyah kesikli çizgi ile gösterilen düzlemdir. Kafatasında frontal kemiğe paralel olduğu için bu düzleme aynı zaman da Frontal düzlem de denir.

Transvers Düzlem: Yere paralel olan ve şekilde mavi kesikli çizgiyle gösterilen düzlemdir. Vücudu alt (caudal) ve üst (cranial) iki bölge olarak ayırır. Bu düzlem aynı zaman da Horizontal düzlem olarak da bilinir.

Dikey (Vertical) Eksen: Sagital ve Coronal düzlemlerin kesiştiği doğrultular kümesidir. Yere dik olup vücutta caudal kısımdan cranial kısma doğru yönlenen bu eksen şekilde siyah çizgi ile gösterilmiştir.

Sagital Eksen: Önden arkaya doğru uzana bu eksen sagital ve transvers düzlemlerin kesişme doğrultusundadır.

Transvers (Horizontal) Eksen: Anatomik duruşta vücudun solundan sağına doğru uzanır. Coronal ve transvers düzlemlerin çakışma doğrultusundadır.

Pozisyon ve Hareket Terimleri

Anterior (ventral): Coronal düzlemin ön tarafı.

Posterior (dorsal): Coronal düzlemin arka tarafı.

Medial: Koronal düzlemde bulunan noktalardan sagital düzleme en yakın olanı.

Lateral : Koronal düzlemde bulunan noktalardan sagital düzleme en uzak olanı.

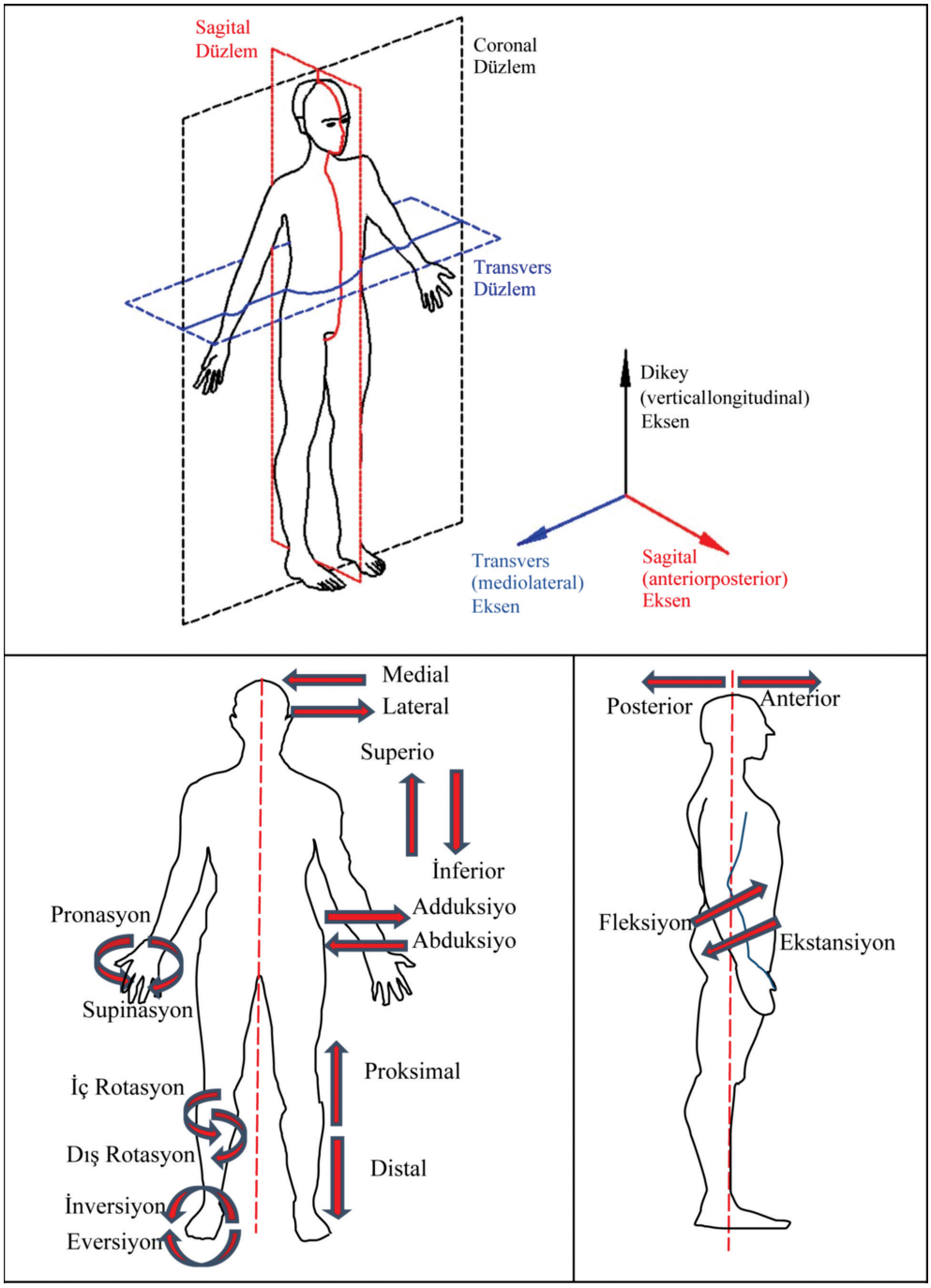
Distal: Uzuvlardan veya aynı uzuv üzerindeki noktalardan uzvun vücuda bağlandığı noktaya en uzak olanı.

Proksimal: Uzuvlardan veya aynı uzuv üzerindeki noktalardan uzvun vücuda bağlandığı noktaya en yakın olanı.

Superior: Üst kısma (Cranial) yakın olan.

İnferior: Alt kısma (Caudal) yakın olan.

Abduksiyon: Bir uzvun sagital düzlemden uzaklaşacak şekilde yaptığı hareket.



Şekil 1. Anatomik düzlem ve eksen ile hareketlerin yönleri.

Adduksiyon: Bir uzvun sagital düzlemd yaklaşacak şekilde yaptığı hareket.

Fleksiyon: Bir uzvun vücut ile arasındaki açıyı azaltacak şekilde vücuda yaklaşması.

Ekstansiyon: Bir uzvun vücut ile arasındaki açıyı artıracak şekilde vücuttan uzaklaşması.

Dış rotasyon: Bir uzvun ekseni etrafında yaptığı içe doğru dönme hareketi.

İç rotasyon: Bir uzvun ekseni etrafında yaptığı dışa doğru dönme hareketi.

İnversiyon: Ayağın ayak tabanı içe (sagital düzleme) bakacak şekilde yaptığı dönme hareketi.

Eversiyon: Ayağın ayak tabanı dışa bakacak şekilde yaptığı dönme hareketi.

Pronasyon: Ön kolun ekseni etrafında saat yönünün tersine yaptığı dönme hareketi.

Supinasyon: Ön kolun ekseni etrafında saat yönünde yaptığı dönme hareketi.

Mekaniğe Giriş

Mekanik, kuvvet altındaki cisimlerin durağan ve hareket halindeki davranışlarını inceleyen fizik bilimidir. Mekanik farklı bakış açılarına göre çeşitli alt dallara ayrılabilir. Genel olarak Klasik Mekanik (Newton Mekaniği) ve Kuantum Mekaniği olarak iki ayrı ana dalda değerlendirilmektedir. Newton Mekaniği'ne, makroskopik cisimlerin davranışını açıklamak için başvurulurken, çok küçük ölçeklerde, çok yüksek hızlarda veya çok güçlü kütle çekimsel alanların varlığında geçerliliğini yitirir ve bu durumlarda Kuantum Mekaniği teorisi geçerli olur.

Tablo 1'de, kitabın bu bölümünde değinilecek olan Klasik Mekanik'in alt dalları verilmiştir. Mekaniğin içerdiği konuların girift yapısı, yapılan sınıflandırmanın bilim insanlarının bakış açılarına göre farklılık gösterebilmesine sebep olabilmektedir.

Rijit Cisimler Mekaniği, kuvvet etkisi altındaki bir cismin davranışını inceler. Bu dalda cisimlerin şekil değiştirmediği kabulü (ideal cisim kabulü) yapılmaktadır. Statik, kuvvet altındaki cisimlerin hareketsiz ya da sabit hızla (ivmesiz) hareket ettiği durumlardaki dengesi ile ilgilenir. Dinamik ise ivmeli hareket eden cisimlerin mekanik analizi ile ilgilidir. Dinamik bir sistem için ivmenin sıfır olduğu durumlarda sistem statik dengede kabul edilebilir ve

TABLO 1. Klasik Mekaniğin Alt Dalları.

Klasik Mekanik						
Rijit Cisimler Mekaniği			**Sürekli Ortamlar Mekaniği**			
Statik	Dinamik		Şekil değiştirebilen cisimler mekaniği (Mukavemet)		Akışkanlar mekaniği	
	Kinematik	Kinetik	Elastisite	Plastisite	Newtonyen olmayan akışlar	Newtonyen akışlar

dolayısıyla statik, dinamiğin bir alt dalı olarak değerlendirilebilir. Örneğin, otobüs durağında ayaktaki pozisyonunu sabit tutarak bekleyen bir kişinin vücudu statik denge altında bulunurken, otobüs gelince otobüse binmek için yürümeye başlayan ve değişken hız ile hareket eden kişinin vücudu dinamik denge altında bulunmaktadır. Otobüse yetişmek için eğer sabit hızla hareket edilirse, bu durum statik dengenin korunduğu anlamına gelir.

Sürekli Ortamlar Mekaniği, ayrık maddesel yapılar yerine süreklilik arz eden bir kütle olarak modellenen katı ve akışkan malzemelerin mekanik davranışlarını inceleyen bilim dalıdır. Mukavemet alanında, incelenen cisimlerin, rijit davranış göstermeyip kuvvet etkisi altında şekil değiştirdiği kabul edilir ve şekil değişimi ile uygulanan kuvvetler arasındaki ilişkinin analizi gerçekleştirilir.

Bu kitabın hedef kitlesi göz önüne alındığında Mekanik konusu, Statik, Dinamik ve Mukavemet alt başlıklarında, özellikle biyomekanik örnekler ve uygulamalar üzerinden incelenecektir.

Klasik Mekanik Newton'ın, 1687 tarihinde yayımlanan Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (*Doğa Felsefesinin Matematiksel Prensipleri* olarak çevrilebilir) adlı eserinde ortaya koyduğu üç temel tasa üzerine dayanmaktadır. Bu yasalar, bir cisim üzerine etki eden kuvvetler ve cismin hareketi arasındaki ilişkileri ortaya koymaktadır.

Newton'un Hareket Kanunları

Birinci Kanun: Eylemsizlik ilkesi olarak da adlandırılır. Eğer bir cisme etki eden bileşke kuvvet sıfır ise, cisim duruyorsa durmasına, sabit hızla hareket ediyorsa bu hızda hareket etmeye devam eder.

Bu durumda olan cisimler statik denge altındadır. Cisme etkiyen bileşke kuvvet sıfır ise, $\sum \mathbf{F} = 0$ şeklinde matematiksel olarak ifade edilir.

Örneğin, sabit hızla buz üzerinde kayan bir statik denge altındadır. Patencinin kayma hızı değişirse, yani dışarıdan bir etkiye maruz kalırsa (sürtünme, itme veya çekme gibi) statik denge kaybolmuş olur.

İkinci Kanun: Dinamiğin temel prensibi olan bu kanun, bir cisme etki eden kuvvetlerin bileşkesinin sıfır olmadığı durumda, cismin net bileşke kuvvet yönünde ivme kazanacağını ifade eder. Etkiyen net kuvvetin ivmeye oranı sabit ve cismin kütlesine eşittir.

Bu durumda olan cisimler dinamik denge altındadır ve matematiksel olarak $\sum \mathbf{F} = m.\mathbf{a}$ denklemi ile formüle edilirler. Örneğin, Biodex cihazı (izokinetik sandalye) kullanılarak değişken hızla (değişken hız beraberinde ivme ortaya çıkarır) yaptırılan üst ya da alt uzuvların hareketleri sırasında uzuvlar dinamik denge altında hareket ederler.

Üçüncü Kanun: Etki-tepki prensibi olarak da bilinir. Bir cisme etkiyen kuvvete (etki kuvveti), cisim de aynı doğrultu ve büyüklükte, ancak zıt yönde bir kuvvet (tepki kuvveti) uygular.

Örneğin, bir duvara hızla çarpan bir bisikletlinin duvara uyguladığı çarpma kuvveti, aynı büyüklükte (genlik) ancak zıt yönde duvardan bisikletli kişiye de uygulanmış olur.

Temel Kavramlar

Mekanik konusuna girmeden önce, temel fiziksel ve matematiksel kavramların hatırlatılmasının faydalı olacağı düşünülmüştür. Bu bölümde, mekanik analizin temel taşlarından vektör kavramından ve vektörel büyüklük ve işlemlerden bahsedilmektedir.

Vektörler: Pozisyon, Kuvvet, Moment

Mekanikteki fiziksel büyüklükler matematiksel olarak skaler ya da vektörel büyüklük olarak ifade edilirler.

Skaler Büyüklük: Pozitif veya negatif sayı ile ifade edilen, yalnızca genlik (şiddet) barındıran büyüklüklerdir. Kütle, sıcaklık, yaş, hacim, uzunluk, vb.

Vektörel Büyüklük: Hem genliği hem de yönü olan büyüklüklerdir. Kuvvet, pozisyon, hız, ivme, momentum, vb.

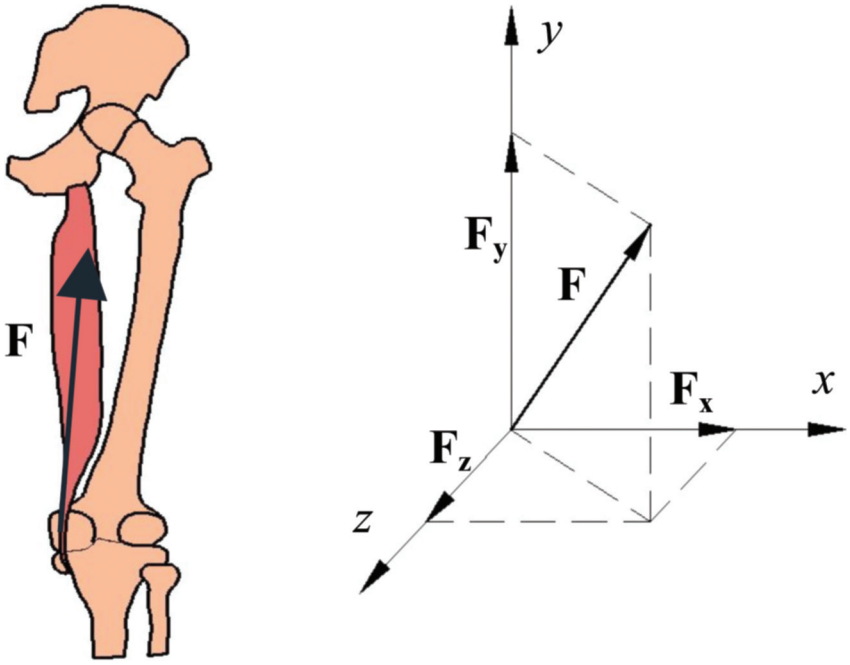
Bu bölüm kapsamında skaler büyüklükler italik olarak (A), vektörel büyüklükler ise kalın düz karakterlerle ($\mathbf{A}$) ifade edilecektir.

Bir üçgende açı ve uzunluk arasındaki ilişkiler aşağıdaki eşitlikler ile sağlanabilir.

Kartezyen Vektör Gösterimi

Şekildeki semitendinosus kasının insersio noktası, kartezyen koordinat sisteminin (xyz koordinat sistemi) merkezi olsun (Şekil 2). Kartezyen koordinat sistemi içerisinde gösterilen $\mathbf{F}$ vektörü (kas kuvveti), x, y ve z eksenlerindeki bileşenlerinin ($\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$, $\mathbf{F}_z$) toplamı olarak vektörel biçimde yazılabilir.

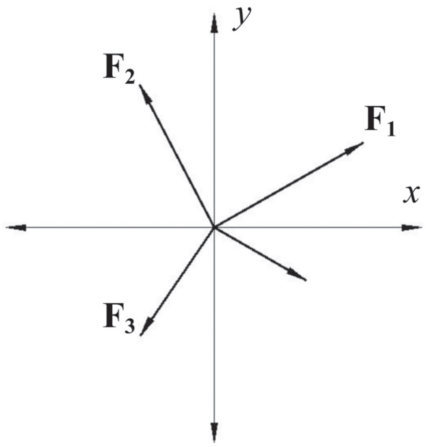
$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$$



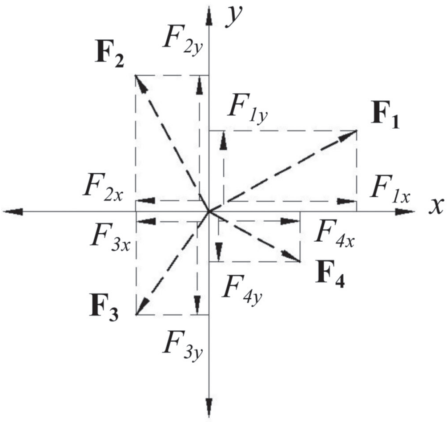
Şekil 2. Semitendinosus kasının ve bu kasın kuvvetinin gösterimi.

F_x, F_y ve F_z, **F** kuvvetinin sırasıyla x, y ve z eksenlerindeki genliğini (büyüklüğünü) göstermektedir. Bu değerler **F** kuvvetinin, kartezyen eksenlerdeki bileşenleridir.

Örnek: Şekildeki xy koordinat ekseninde tanımlanmış olan $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, $\mathbf{F_3}$ ve $\mathbf{F_4}$ kuvvetlerinin toplamını kartezyen vektör notasyonu kullanarak elde ediniz. Toplam vektörün şiddetini ve yönünü bulunuz.



Kuvvetlerin bileşenlerinin hesaplanabilmesi için, her bir kuvvetin x ve y eksenlerindeki izdüşümlerinin (x ve y eksenleri doğrultusundaki bileşenleri) belirlenmesi gerekir. Örneğin, $\mathbf{F_1}$ kuvvetinin x ve y eksenlerindeki bileşenleri sırasıyla F_{1x} ve F_{1y} dir. Aşağıdaki şekilde, dört farklı kuvvetin, x ve y eksenlerindeki bileşenleri gösterilmiştir.



$$\mathbf{F_1} = F_{1x}\mathbf{i} + F_{1y}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F_2} = -F_{2x}\mathbf{i} + F_{2y}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F_3} = -F_{3x}\mathbf{i} - F_{3y}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F_4} = F_{4x}\mathbf{i} - F_{4y}\mathbf{j}$$

Vektörlerin toplamı, $\mathbf{F_T}$

$\mathbf{F_T} = F_{1x}\mathbf{i} + F_{1y}\mathbf{j} - F_{2x}\mathbf{i} + F_{2y}\mathbf{j} - F_{3x}\mathbf{i} - F_{3y}\mathbf{j} + F_{4x}\mathbf{i} - F_{4y}\mathbf{j}$

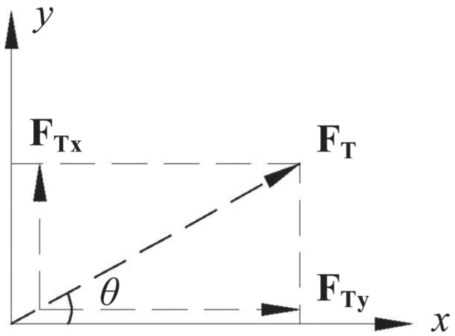
$\mathbf{F_T} = (F_{1x} - F_{2x} - F_{3x} + F_{4x})\mathbf{i} + (F_{1y} - F_{2y} - F_{3y} - F_{4y})\mathbf{j}$ şeklinde elde edilir.

Toplam vektörün şiddeti, vektörel büyüklüğün mutlak değerini hesaplayarak elde edilebilir.

$$|F_T| = \sqrt{(F_{1x} - F_{2x} - F_{3x} + F_{4x})^2 + (F_{1y} + F_{2y} - F_{3y} - F_{4y})^2}$$

Toplam vektörünün doğrultusunun (yatayla yaptığı açının) tespitinin yapılması:

Elde edilen toplam vektörünün bileşenlerinin grafiği F_{Tx} ve F_{Ty} olsun. Bu durumda, $\mathbf{F_T} = F_{Tx}\mathbf{i} + F_{Ty}\mathbf{j}$ şeklinde ifade edilir.



Bu durumda doğrultuyu verecek olan θ açısı,

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{F_{Ty}}{F_{Tx}} \right|$$

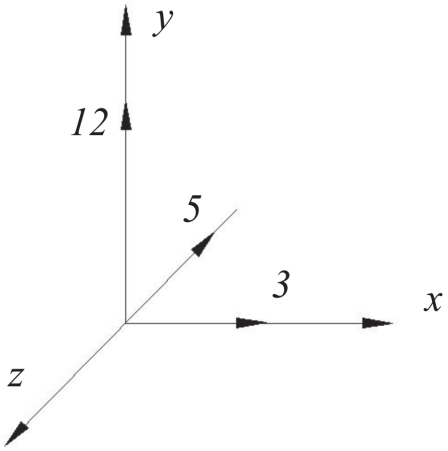
eşitliği ile bulunabilir.

Örnek: $\mathbf{F}_1 = \mathbf{3i} + \mathbf{4j}$ vektörü ile $\mathbf{F}_2 = \mathbf{8j} - \mathbf{5k}$ vektörünün toplamını bulunuz.

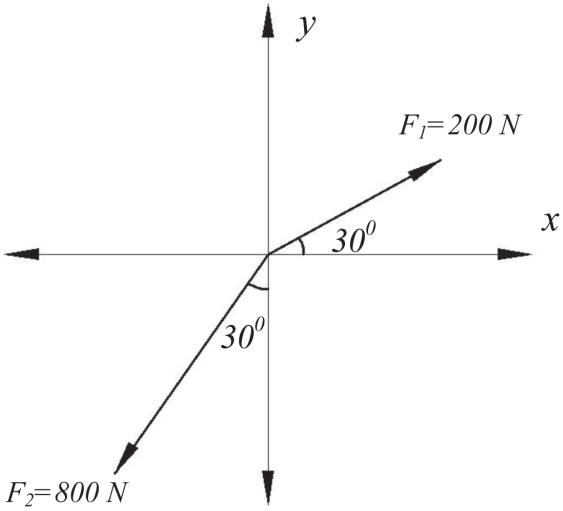
Toplam vektör; $\mathbf{F}_T$

$\mathbf{F}_T = \mathbf{3i} + \mathbf{4j} + \mathbf{8j} - \mathbf{5k}$

$\mathbf{F}_T = \mathbf{3i} + \mathbf{12j} - \mathbf{5k}$ olarak bulunur.



Örnek: Şekildeki $\mathbf{F}_1$ ve $\mathbf{F}_2$ kuvvet vektörlerinin bileşkesini bulunuz. Bileşke kuvvetin doğrultusunu hesaplayınız.



$$\mathbf{F_1} = F_{1x}\mathbf{i} + F_{1y}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F_2} = -F_{2x}\mathbf{i} - F_{2y}\mathbf{j}$$

$$F_{1x} = F_1.\cos 30$$

$$F_{1x} = 200 \times 0,866 = 173,2\ N$$

$$F_{1y} = F_1.\sin 30$$

$$F_{1y} = 200 \times 0,5 = 100\ N$$

$$F_{2x} = F_2.\sin 30$$

$$F_{2x} = 800 \times 0,5 = 400\ N$$

$$F_{2y} = F_2.\cos 30$$

$$F_{2y} = 800 \times 0,866 = 692,8\ N$$

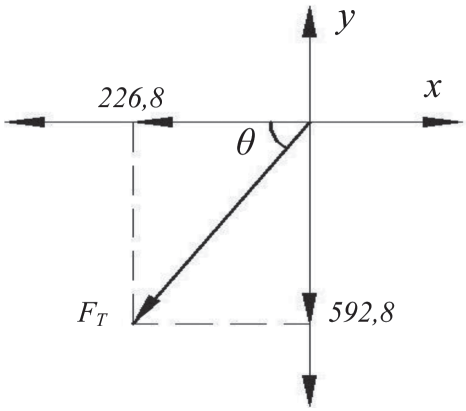
Bileşke kuvvet, $\mathbf{F}_T$

$\mathbf{F}_T = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (173{,}2\mathbf{i} + 100\mathbf{j} - 400\mathbf{i} - 692{,}8\mathbf{j})$

$\mathbf{F}_T = -226{,}8\mathbf{i} - 592{,}8\mathbf{j}$N

$\mathbf{F}_T$ kuvvetinin genliği (büyüklüğü)

$F_T = \sqrt{(-226{,}8)^2 + (-592{,}8)^2} = 634{,}7$ N olarak elde edilir.



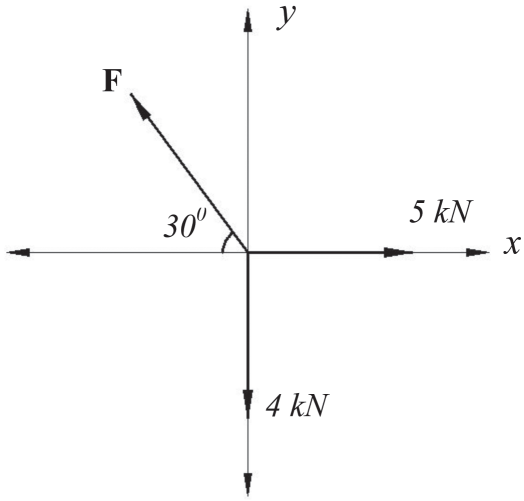
$$\tan\theta = \frac{592{,}8}{226{,}8}$$

$$\tan\theta = 2{,}613$$

$$\theta = tan^{-1}(2{,}613)$$

$$\theta = 69{,}05^0$$

Örnek: Şekildeki **F** kuvvetinin genliği ne olmalıdır ki üç kuvvetin toplam bileşkesi 0 olsun?



F kuvvetinin *x* ve *y* bileşenleri sırasıyla $\mathbf{F}_x$ ve $\mathbf{F}_y$ olsun. Toplam bileşke kuvvet de $\mathbf{F}_T$ olsun.

$\mathbf{F}_T = 0$ olması için;

$-F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} = 0$ olmalıdır.

$(-F_x + 5)\mathbf{i} + (F_y - 4)\mathbf{j} = 0$ ve olmalıdır.

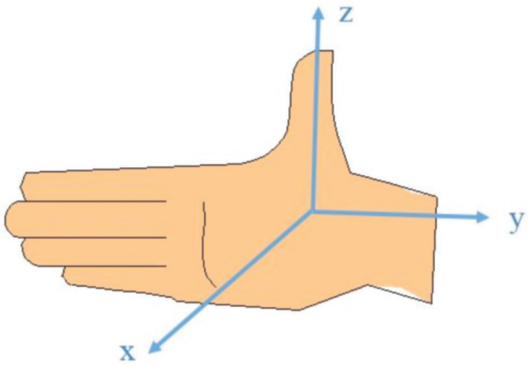
$-F_x + 5 = 0$ ve $F_y - 4 = 0$ ve bulunur.

Buradan **F** kuvvetinin genliği,

$F = \sqrt{5^2 + 4^2} = 6{,}4N$ bulunur.

Sağ El Kuralı

Mekanikte kartezyen koordinat sistemindeki eksenlerin doğrultuları ve pozitif yönleri, sağ el kuralı ile belirlenebilir. Bu kurala göre, başparmağın yönü pozitif *z*-eksenini, avuç içi pozitif *x*-eksenini, ön kolun ekseni de pozitif *y*-eksenini göstermektedir (Şekil 3).



Şekil 3. Sağ el kuralı ile kartezyen koordinat sistemindeki eksenlerin pozitif yönlerinin tayini.

Birim Vektör

Birim vektör (**u**), genliği 1 birim olan birimsiz bir vektördür. **F** vektörü için birim vektör;

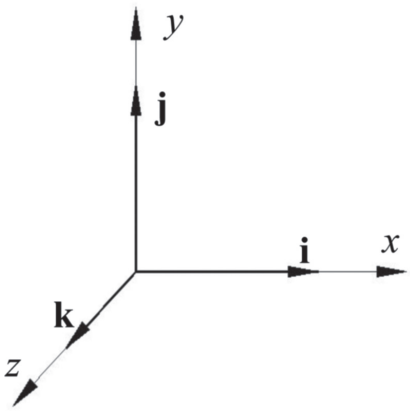
$$\mathbf{u}_F = \frac{\mathbf{F}}{|\mathbf{F}|}$$

Şeklinde yazılır. **F** vektörü, birim vektörü $\mathbf{u}_F$ ile aynı yöne sahiptir. Birim vektör, aşağıdaki eşitlikte görülebileceği gibi bir vektörün genliğini ve yönünü ayrı ayrı yazmak için kullanılabilir.

$$\mathbf{F} = F.\mathbf{u}_F$$

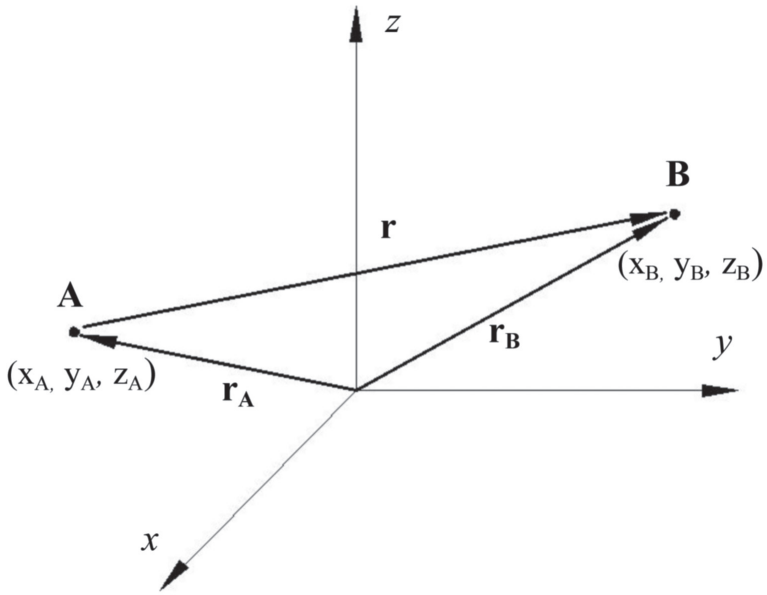
F değeri, **F** vektörünün genliğidir.

Kartezyen Birim Vektörler



i, **j** ve **k** birim vektörleri sırasıyla x, y ve z kartezyen eksenlerinin birim birim vektörleridir.

Pozisyon Vektörü



A ve B noktalarını birbirine bağlayan pozisyon vektörü **r** olsun. Bu durumda **r**;

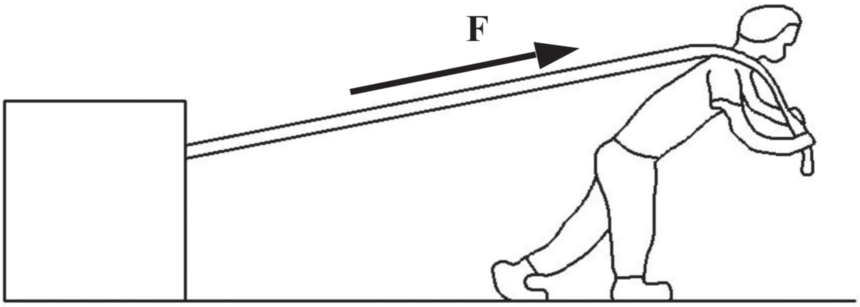
$$\mathbf{r} = \mathbf{r_B} - \mathbf{r_B}$$

$$\mathbf{r} = x_B\,\mathbf{i} + y_B\,\mathbf{j} + z_B\,\mathbf{k} - x_A\,\mathbf{i} - y_A\,\mathbf{j} - z_A\,\mathbf{k}$$

$\mathbf{r} = (x_B - x_A)\,\mathbf{i} + (y_B - y_A)\,\mathbf{j} + (z_B - z_A)\,\mathbf{k}$ şeklinde ifade edilir.

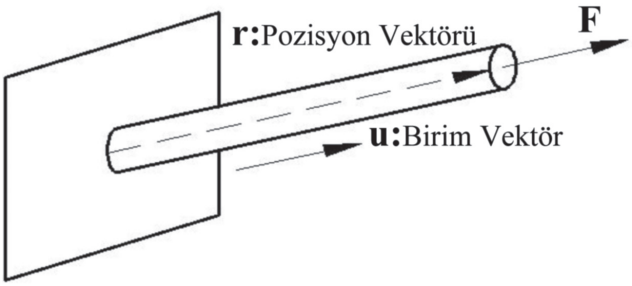
Kuvvet Vektörü

Kuvvet hem şiddeti (genliği) hem de yönü olan vektörel bir büyüklüktür. Örneğin şekildeki kişi, bir yükü yatay eksen doğrultusunda hareket ettirebilmek için bir kayış vasıtasıyla yüke **F** kuvveti uygulamaktadır (Şekil 4). Bu kuvvet, vektörel formda açık olarak ifade edilmek istenirse, aşağıda bağıntılar kullanılabilir.



Şekil 4. Kuvvet vektörünün etki doğrultusu.

Bir kuvvet vektörü **F**, şiddeti ($|F|$) ve doğrultusu (**u**, büyüklüğü 1 birim olan birim vektör) ayrı ayrı gösterilerek aşağıdaki formda ifade edilebilir.

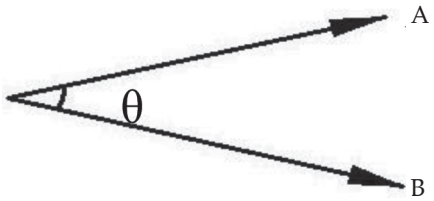


$$\mathbf{F} = |F|\,\mathbf{u}$$

$$\mathbf{F} = F_{\mathbf{r}}$$

r: pozisyon vektörü
r: pozisyon vektörünün şiddeti
F: **F** vektörünün şiddeti

Nokta (Skaler) Çarpım



Şekildeki **A** ve **B** vektörlerinin nokta çarpımının sonucu skaler bir büyüklüktür ve
$\mathbf{A}.\mathbf{B} = A.B.\cos\theta$; $(0 \leq \theta \leq 180)$
değerine eşittir.
Kartezyen vektör formu kullanılarak da nokta çarpımın sonucu bulunabilir. Buna göre,

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{A}.\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_z B_z$$

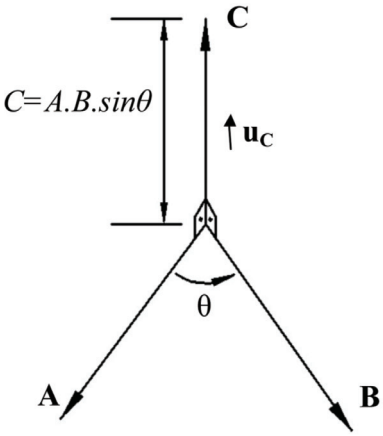
Not: $\mathbf{i}.\mathbf{i} = 1.1.\cos 0 = 1$
$\mathbf{i}.\mathbf{j} = 1.1.\cos 90 = 0$
$\mathbf{j}.\mathbf{k} = 1.1.\cos 90 = 0$

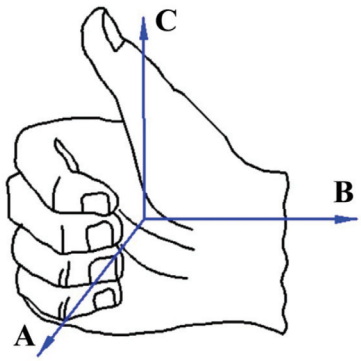
Vektörel Çarpım

A x B = C

C = $(A.B.sin\theta)$.$\mathbf{u}_c$

C vektörünün şiddeti, **C** = $A.B.sin\theta$ $(0 \leq \theta \leq 180)$ şeklinde bulunur. Vektörün yönü ise sağ el kuralına göre tespit edilir.





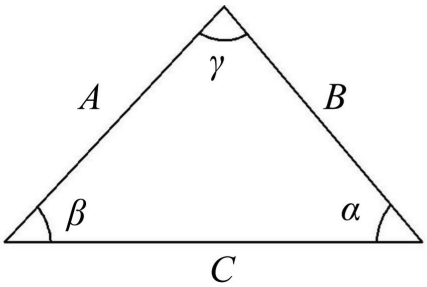
Kartezyen vektör formu kullanarak vektörel çarpımın sonucu aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$\mathbf{A} \text{x } \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y)\mathbf{i} - (A_x B_z - A_z B_x)\mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\mathbf{k}$$

Not:

i × j = k	**j × i = -k**
j × k = i	**k × j = -i**
k × i = j	**i × k = -j**

Temel Trigonometrik Bağıntılar



Sinüs Teoremi : $\dfrac{A}{\sin\alpha} = \dfrac{B}{\sin\beta} = \dfrac{C}{\sin\gamma}$

Kosinüs Teoremi: $C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma}$

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ $\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$ $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$

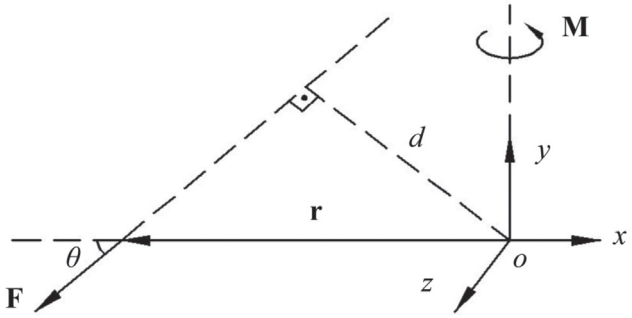
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

2. Statik

Statik konusuna geçmeden önce bazı temel mekanik kavramların hatırlanmasında fayda bulunmaktadır. Bir kuvvetin yarattığı momentin hesabı, serbest cisim diyagramının çizimi, insan vücudundaki eklemler ile mekanikte kullanılan eklemler arasındaki analoji bunlardan bir kaçıdır. Temel mekanik kavramların özetinden sonra statik denge konusuna geçiş yapılacaktır.

Moment

Bir kuvvetin bir eksen etrafında oluşturduğu dairesel etkiye moment denir.



Şekildeki **F** kuvvetinin y-ekseni etrafında oluşturduğu momentin şiddeti (genliği) $M_y = F.d$ eşitliği ile hesaplanır.

F, kuvvetin genliği, d ise kuvvet doğrultusu ile moment ekseni arasındaki dik uzaklıktır. Bununla birlikte, moment hesabı yapılırken aşağıda verilen vektörel formdaki moment denkleminin kullanılması, momentin yönünü ve genliğini en genel formda elde etme açısından çok daha iyi olacaktır.

Bir kuvvetin bir dönme eksenine göre oluşturduğu moment, vektörel formda $\mathbf{M_o} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ bağıntısı ile elde edilir.

Eğer $\mathbf{r} = r_x\mathbf{i} + r_y\mathbf{j} + r_z\mathbf{k}$ ve $\mathrm{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$ ise

$$\mathbf{M_o} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

olacak biçimde elde edilir.

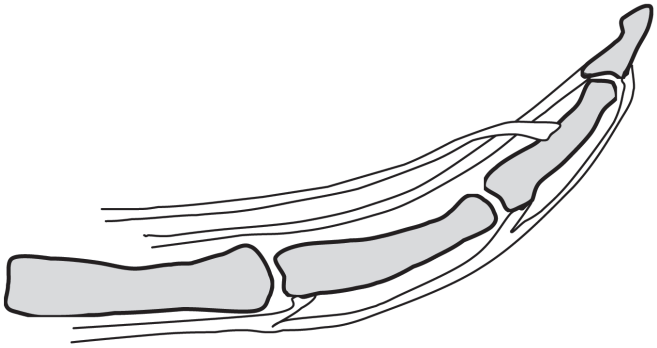
Bu determinantın sonucu:

$$\mathbf{M_o} = (r_yF_z - r_zF_y)\mathbf{i} - (r_xF_z - r_zF_x)\mathbf{j} + (r_xF_y - r_yF_x)\mathbf{k}$$

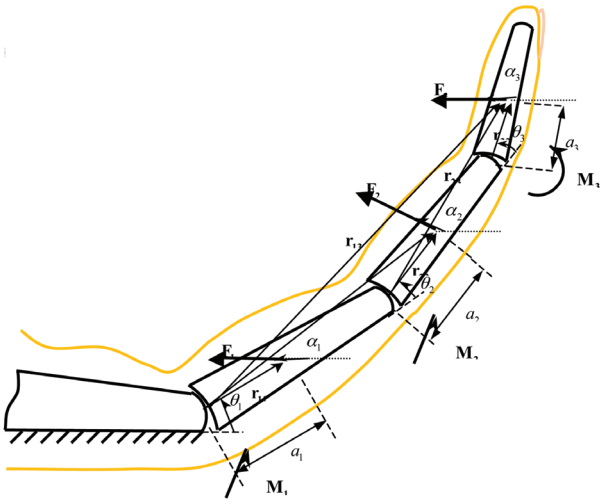
Bu şekildeki hesaplama ile **F** kuvvetinin yalnızca y-ekseni değil aynı zamanda x ve z eksenleri etrafında oluşturduğu moment de bulunabilir. Buradan x, y ve z eksenleri etrafında oluşan momentler sırasıyla,

$$\mathbf{M_x} = (r_yF_z - r_zF_y)\mathbf{i}$$
$$\mathbf{M_y} = (r_xF_z - r_zF_x)\mathbf{j}$$
$$\mathbf{M_z} = (r_xF_y - r_yF_x)\mathbf{k}$$

Örnek: Aşağıdaki şekilde işaret parmağının kemik ve tendon yapılarının bir modeli görülmektedir.



Parmağın fleksiyon hareketi için gerekli kas kuvvetleri kemiğe tendonlar vasıtasıyla iletilirler. Aşağıdaki şekilde, kemik-tendon modelinin basitleştirilmiş bir fiziksel modeli gösterilmiştir.



Şekildeki fiziksel sisteme $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$ ve $\mathbf{F_3}$ kuvvetleri etkimektedir. Bu kuvvetlerin yatay eksenle yaptıkları açılar sırasıyla α_1, α_2 ve α_3 ile gösterilmektedir. Eklemlerdeki, kuvvetlerden tarafından oluşturulan $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$ ve $\mathbf{M_3}$ momentlerini parametrik olarak açık formda bulunuz. Birinci link uzunluğu l_1, ikinci link uzunluğu l_2 ve üçüncü link uzunluğu l_3 ile gösterilmektedir.

Bu fleksiyon hareketi için eklemlerde ihtiyaç duyulan momentlerin hesaplanması önemli bir problemdir. Moment değerlerini bulmak için aşağıda verilen yöntem uygulanır.

Üçüncü eklemde oluşan moment değeri;

$$\mathbf{M_3 = r_{33} \times F_3}$$

İkinci eklemdeki moment değeri;

$$\mathbf{M_2 = r_{22} \times F_2 + r_{33} \times F_3}$$

Birinci eklemde oluşan moment değeri de aşağıdaki denklemle hesaplanabilir:

$$\mathbf{M_1 = r_{11} \times F_1 + r_{12} \times F_2 + r_{13} \times F_3}$$

Denklemlerden de anlaşılacağı üzere, birinci eklemde $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$ ve $\mathbf{F_3}$ kuvvetleri, ikinci eklemde $\mathbf{F_2}$ ve $\mathbf{F_3}$ **kuvvetleri ve** üçüncü eklemde ise yalnızca $\mathbf{F_3}$ kuvveti moment oluşturmaktadır.

Sorunun çözümün uzun olmasın sebebiyle aşağıdaki kısaltmalar kullanılacaktır.

$$\theta_{123} = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

$$s_1 = sin\theta_1$$

$$s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$s_{123} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$c_1 = \cos\theta_1$$

$$c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$c_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$\mathbf{r_{11}} = a_1\, c_1\mathbf{i} + a_1\, s_1\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r_{22}} = a_2\, c_{12}\mathbf{i} + a_2\, s_{12}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r_{33}} = a_3\, c_{123}\mathbf{i} + a_3\, s_{123}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r_{12}} = (l_1\, c_1 + a_2\, \mathrm{c}_{12})\mathbf{i} + (l_1\, s_1 + a_2\, s_{12})\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r_{23}} = (l_2\, c_{12} + a_3\, \mathrm{c}_{123})\mathbf{i} + (l_2\, s_{12} + a_3\, s_{123})\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r_{13}} = (l_1\, c_1 + l_2\, c_{12} + a_3\, \mathrm{c}_{123})\mathbf{i} + (l_1\, s_1 + l_2\, s_{12} + a_3\, s_{123})\mathbf{j}$$

Buradan;

$$\mathbf{M_3} = \alpha_3\, (c_{123}\, \mathbf{i} + s_{123}\, \mathbf{j}) \times (\cos\alpha_3\, \mathbf{i} + \sin\alpha_3\, \mathbf{j})$$

$\mathbf{M_3} = \alpha_3 F_3\, (c_{123}\, \sin\alpha_3\, \mathbf{k} - s_{123}\, \cos\alpha_3\, \mathbf{k})$ elde edilir. Bu ifade, momentin vektörel gösterimidir ve moment etkisinin z ekseni etrafında (**k** vektöründen dolayı) oluştuğunu belirtmektedir. $\mathbf{M_3}$ momentinin şiddeti ise aşağıdaki gibidir.

$M_3 = \alpha_3 F_3\, (c_{123}\, \sin\alpha_3 - s_{123}\, \cos\alpha_3)$ İfade trigonometrik toplam bağıntıları kullanılarak sadeleştirilecek olursa, M_3 momentinin şiddeti aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\mathbf{M_2} = (a_2\, c_{12}\mathbf{i} + a_2\, s_{12}\mathbf{j}) \times (F_2 \cos\alpha_2 \mathbf{i} + F_2 \sin\alpha_2 \mathbf{j}) + (l_2\, c_{12}\mathbf{i} + a_3\, \mathrm{c}_{123}\, \mathbf{i} + l_2\, s_{12}\mathbf{j} + a_3\, s_{123}\mathbf{j}) \times F_3 (\cos\alpha_3 \mathbf{i} + \sin\alpha_3 \mathbf{j})$$

$$\mathbf{M_2} = a_2 c_{12} F_2 \sin\alpha_2 \mathbf{k} - a_2 F_2 s_{12} \cos\alpha_2 \mathbf{k} - l_2 s_{12} F_3 \cos\alpha_3 \mathbf{k} - a_3 s_{123} F_3 \cos\alpha_3 \mathbf{k} + l_2 c_{12} F_3 \sin\alpha_3 \mathbf{k} + a_3\, \mathrm{c}_{123}\, F_3 \sin\alpha_3 \mathbf{k}$$

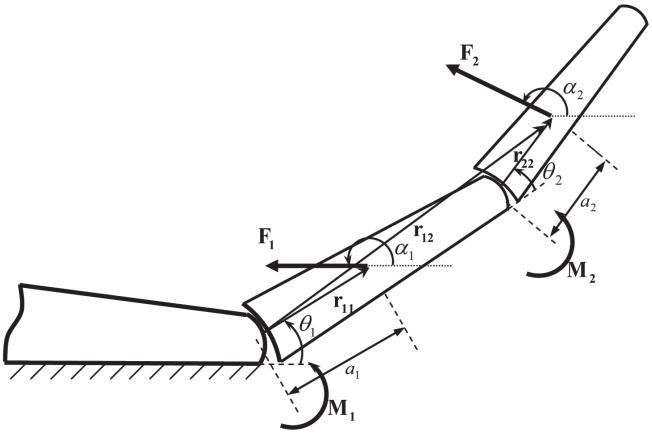
$$\mathbf{M_2} = a_2 F_2 \sin(\alpha_2 - \theta_{12})\mathbf{k} + F_3 l_2 \sin(\alpha_3 - \theta_{12})\mathbf{k} + a_3 F_3 \sin(\alpha_3 - \theta_{123})\mathbf{k}$$

$$M_2 = a_2 F_2 \sin(\alpha_2 - \theta_{12}) + F_3 l_2 \sin(\alpha_3 - \theta_{12}) + a_3 F_3 \sin(\alpha_3 - \theta_{123})$$ (M_2 momentinin şiddeti)

$$\mathbf{M_1} = (a_1\, c_1\mathbf{i} + a_1\, s_1\mathbf{j}) \times (F_1 \cos\alpha_1 \mathbf{i} + F_1 \sin\alpha_1 \mathbf{j}) + (l_1\, c_1\mathbf{i} + a_2\, \mathrm{c}_{12}\, \mathbf{i} + l_1\, s_1\mathbf{j} + a_2\, s_{12}\mathbf{j}) \times F_2 (\cos\alpha_2 \mathbf{i} + \sin\alpha_2 \mathbf{j})$$
$$+ (l_1\, c_1\mathbf{i} + l_2\, c_{12}\mathbf{i} + a_3\, \mathrm{c}_{123}\, \mathbf{i} + l_1\, s_1\mathbf{j} + l_1\, s_{12}\mathbf{j} + a_3\, s_{123}\mathbf{j}) \times F_3 (\cos\alpha_3 \mathbf{i} + \sin\alpha_3 \mathbf{j})$$

olacak şekilde hesaplanır.

Örnek Soru



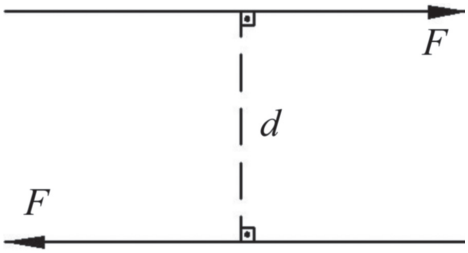
Şekildeki fiziksel sisteme $\mathbf{F}_1$ ve $\mathbf{F}_2$ kuvvetleri etkimektedir. Bu kuvvetlerin yatay eksenle yaptıkları açı α_1 ve α_2'dir. Eklemlerde oluşan $\mathbf{M}_1$ ve $\mathbf{M}_2$ momentlerini parametrik olarak açık forma bulunuz. Birinci link uzunluğu l_1, ikinci link uzunluğu l_2'dir.

Cevap: $\mathbf{M_1} = (\alpha_1 F_1 \sin(\alpha_1 - \theta_1) + l_1 F_2, \sin(\alpha_2 - \theta_1) + \alpha_2 - F_2 \sin(\alpha_2 - \theta_1 - \theta_2)\mathbf{k}$

$\mathbf{M_2} = \alpha_2 F_2 \sin(\alpha_2 - \theta_1 - \theta_2)\mathbf{k}$

Kuvvet Çifti Sistemleri

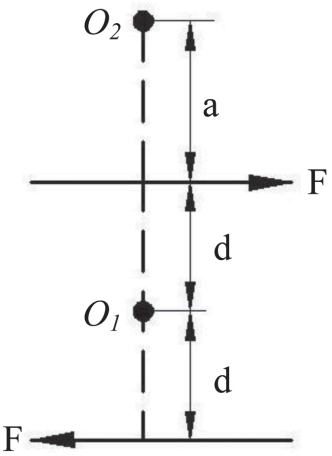
Bir cisme etki eden bir kuvvet, etkime doğrultusu boyunca cismi çekmeye, itmeye ya da kesmeye zorlar. Ayrıca bu kuvvet cismi, doğrultusu üzerinde bulunmayan bir nokta etrafında döndürmeye (moment uygulamaya) çalışır. Kuvvet çifti sistemleri bu durumdan farklı olarak, uygulandıkları cisimde yalnızca moment etkisi oluştururlar; çünkü bir kuvvet çifti sisteminin bileşkesi sıfıra eşittir. Kuvvet çifti sistemi, eşit genlikli, zıt yönlü ve paralel iki kuvvetin oluşturduğu bir sistemdir (Şekil 5).



Şekil 5. Kuvvet çifti sistemi.

Şekildeki kuvvet-çiftinin oluşturduğu momentin genliği $M=F.d$ değerine eşittir. Diğer kuvvet sistemlerinde moment vektörü moment alınan noktaya bağlı olurken, kuvvet çiftine ait moment vektörü, moment alınan noktadan tamamen bağımsızdır.

İspat:



F-F kuvvet çiftinin O_1 ve O_2 noktalarında oluşturduğu momentleri hesaplayalım.

Saat yönünün tersi pozitif yön olarak kabul edilirse;

$$M_{O_1} = -Fd - Fd = -2Fd$$

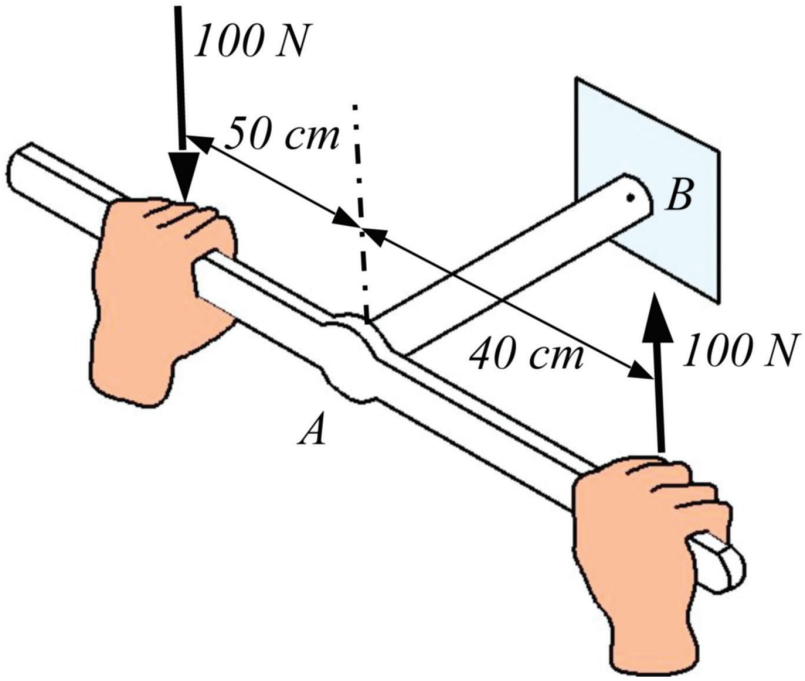
$$M_{O_2} = Fa - F(a+2d) = Fa - Fa - 2Fa$$

$$M_{O_2} = -2Fd$$

$$M_{O_1} = M_{O_2}$$

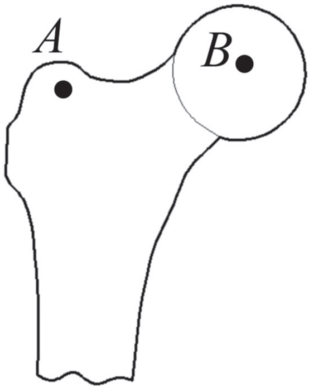
eşitliği bulunmuş olur.

Örnek: Aşağıdaki sistemde uygulanan kuvvetlerin etkisiyle silindirik parçanın merkezinde bulunan B noktasında ortaya çıkan momenti hesaplayınız.

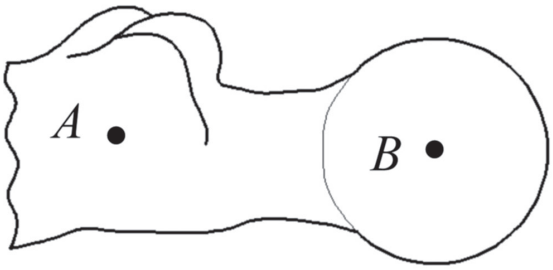


Çözüm: Saat yönünün tersi pozitif kabul edilirse;
$M_B = 100\ N \times 90\ cm = 9000\ Ncm = 900\ Nm$ olarak hesaplanır.

Kuvvet çifti sisteminden farklı olarak bir cisme uygulanan tek bir kuvvetin cisim üzerinde oluşturduğu etkiler de incelenebilir. Aşağıdaki şekillerde *A* noktası gluteus medius kasının femur başındaki insertion noktasını, *B* noktası da femur başının merkezini göstemektedir.

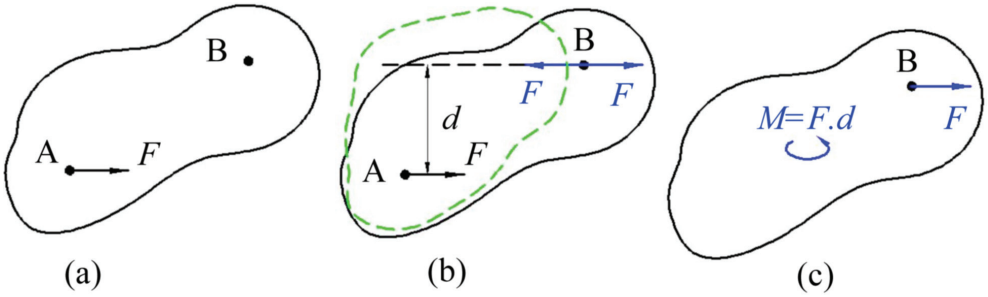


Frontal düzlemde femur başının görünümü



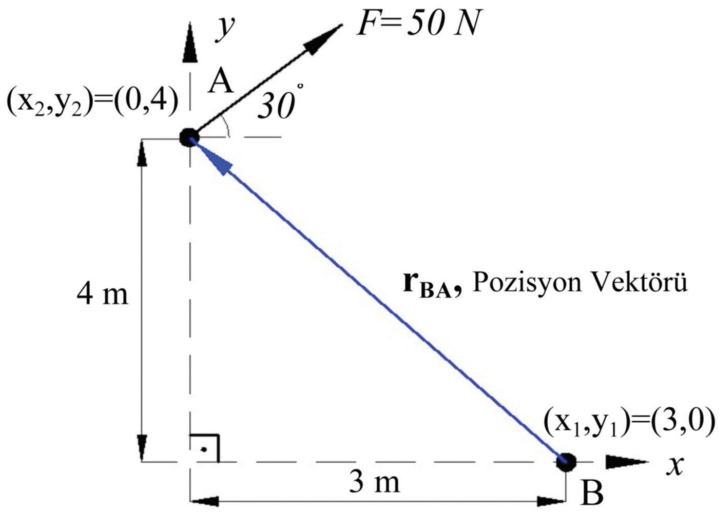
Horizontal düzlemde femur başının görünümü

Gluteus medius kasının femur üzerinde *A* noktasından uyguladığı kuvvet horizontal düzlem boyunca *B* noktasına taşınmak istenirse izlenecek prosedür Şekil 6'da gösterilmiştir.



Şekil 6. Bir cisme uygulanan kuvvetin cisim üzerindeki etkileri. a) Cisme A noktasından F kuvveti uygulanmaktadır. b) B noktasına, A noktasına etkiyen kuvvetle aynı genlikte zıt yönlü iki kuvvet uygulandığı varsayılsın (bu varsayım sonucunda cismin davranışında herhangi bir farklılık olmayacaktır). Bu durumda bir *F-F* kuvvet çifti oluşmaktadır (yeşil ile çevrelenen kuvvetler). c) Kuvvet çiftinin cismin her tarafında oluşturduğu moment *M=Fd* değerine eşittir. Dolayısıyla A noktasına etki eden F kuvvetinin cisim üzerinde bir moment ve doğrusal bir etki (F) oluşturduğu görülmektedir.

Örnek: *F=50 N* büyüklüğündeki kuvvetin B noktası çevresinde oluşturduğu momenti hem skaler hem de vektörel formda elde ediniz.



a) Skaler Yöntem

$$M_B = -F\cos 30 \times 4 - F\sin 30 \times 3$$

$$M_B = -50.\cos 30.4 - 50.\sin 30.3$$

$$M_B = -248.2 \text{ Nm}$$

b) Vektörel Yöntem

$$\mathbf{M_B} = \mathbf{r_{AB}} \times \mathbf{F}$$

$$\boldsymbol{M_B} = \{(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}\} \text{ x } \{F.\cos 30.\mathbf{i} + F.\sin 30.\mathbf{j}\}$$

$$\boldsymbol{M_B} = \{(0-3)\mathbf{i} + (4-0)\mathbf{j}\} \text{ x } \{50.\cos 30.\mathbf{i} + 50.\sin 30.\mathbf{j}\}$$

$$\boldsymbol{M_B} = -248,2\mathbf{k} \text{ Nm}$$

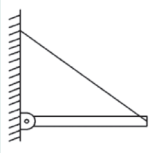
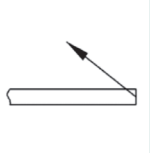
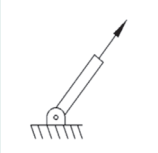
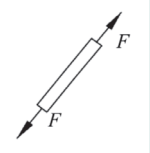
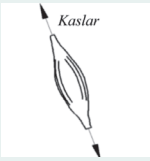
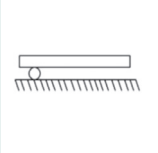
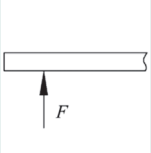
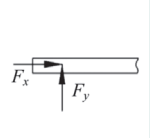
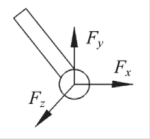
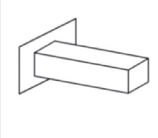
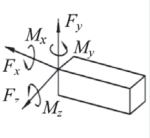
Cevaptaki eksi (-) işareti, momentin yönünün saat yönünde yani negatif yönde olduğunu belirtmektedir.

Mekanik Eklem Tipleri

Çeşitli varsayımlar altında insan ya da hayvanların vücut modelleri, mekanik sistemlerle benzeşim kurularak oluşturulabilmektedir. Bu tip çalışmalarda en önemli hususlardan biri, vücut eklemlerinin yüksek bir yakınsaklıkla mekanik olarak modellenebilmesidir.

Aşağıdaki tabloda, insan vücudunda bulunan belli başlı eklem (mafsal) tipleri ve bunların mekanik eşdeğerleri verilmiştir.

TABLO 1. İnsan Vücudunda Bulunan Başlıca Eklem Tipleri ve Bunların Mekanik Eşdeğerleri

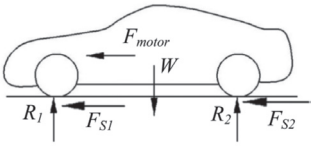
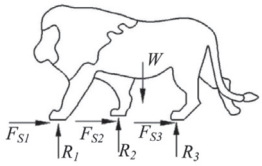
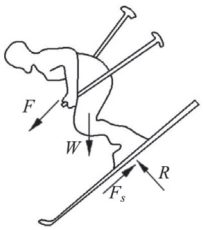
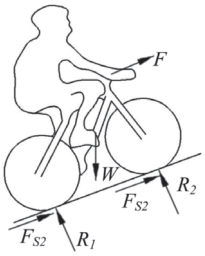
Mesnet (eklem) tipi	Şekil	Serbest Cisim Diyagramı	Biyomekanik Örnekler	Bilinmeyen kuvvetler
Esnek Elemanlar (Kablolar ve İpler)				Bilinmeyen sayısı: 1 İplerdeki veya kablolardaki çekme kuvvetinin büyüklüğü
İki kuvvet etkisindeki elemanlar				Bilinmeyen sayısı: 1 Kuvvetin büyüklüğü
Kayar mesnet (sürtünmesiz)				Bilinmeyen sayısı: 1 Kuvvetin büyüklüğü
Basit mesnet bağlantısı				Bilinmeyen sayısı: 2 Kuvvetin (kuvvet bileşenleri) doğrultusu ve büyüklüğü
Küresel Mafsal				Bilinmeyen sayısı: 3 Kuvvetin Doğrultu ve Büyüklüğü
Ankastre (gömülü) mesnet				Bilinmeyen sayısı: 6 Kuvvetin ve momentin doğrultu ve büyüklükleri

Serbest Cisim Diyagramı

Mekanik (ve aynı zamanda biyomekanik sistemlerin) statik ya da dinamik analizlerini yapmak için serbest cisim diyagramlarının (SCD) çizilmesi ilk ve belki de en önemli aşamadır. Bir cisim veya sisteme ait SCD, ilgili yapının çevresinde temas halinde bulunduğu her bağlantıdan izole edilmesiyle çizilir. SCD'nın çizimi için;

1. Sistem çevresinden tamamen izole edilir.
2. İzole edilen bütün bağlantı yüzeylerinde tepki (reaksiyon) kuvvetleri gösterilir.
3. Sisteme etki eden dış kuvvetler (sistemin ağırlığı da dahil olmak üzere) izole edilen yapı üzerinde gösterilir.

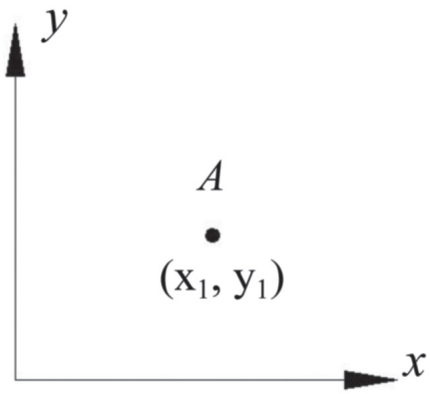
Aşağıda çeşitli fiziksel sistemlerin serbest cisim diyagramı örnekleri verilmiştir.

	Dış kuvvetler	Reaksiyon (tepki) kuvvetleri
	F_{motor}: motorun uyguladığı kuvvet F_{S1}, F_{S2}: sürtünme kuvveti W: ağırlık	R_1, R_2
	F_S: sürtünme kuvveti W: ağırlık	R
	F_{S1}, F_{S2}, F_{S3}: sürtünme kuvveti W: ağırlık	R_1, R_2, R_3
	F: kayakçının uyguladığı itme kuvveti F_S: sürtünme kuvveti W: ağırlık	R
	F: bisikletçinin uyguladığı çekme kuvveti F_{S1}, F_{S2}: sürtünme kuvveti W: ağırlık	R_1, R_2

Serbestlik Derecesi

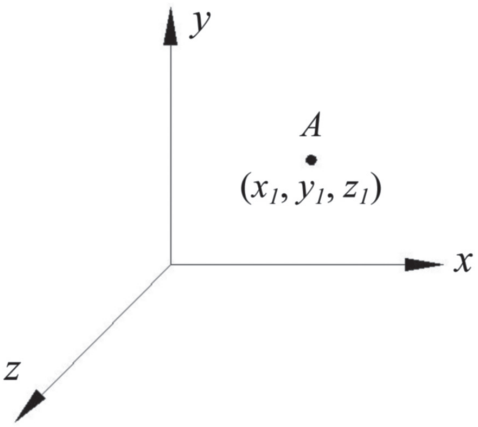
Serbestlik derecesi (SD), bir cismin ya da mekanik sistemin pozisyonunu ve yönelimini (orientation) belirlemek için gerekli minimum parametre sayısıdır.

Örnek: *xy* düzlemindeki bir noktanın (*A* noktası) SD'si kaçtır?



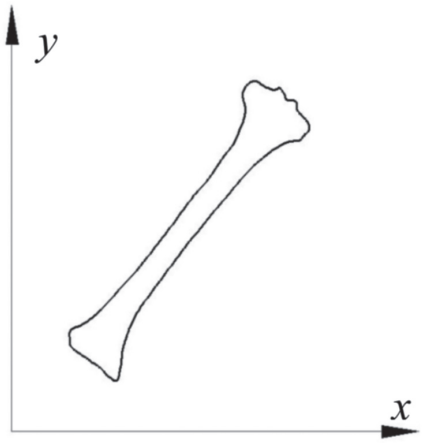
Noktanın pozisyonunu belirlemek için noktanın *x* ve *y* koordinatlarını (x_1,y_1) bilmek yeterlidir. Nokta, katı bir cisim olmadığından dolayı oryantasyonu yoktur. Dolayısıyla nokta için SD = 2'dir.

Örnek: *xyz* koordinat sisteminde (uzayda) tanımlı *A* noktasının SD'si kaçtır?

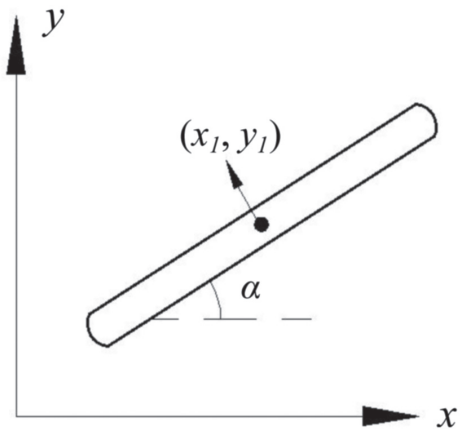


Noktanın *x*, *y*, *z* eksenlerindeki izdüşümlerini (koordinatlarını) bilmek noktanın pozisyonunu belirlemek için yeterlidir. Dolayısıyla noktanın uzaydaki SD değeri 3 olur.

Örnek: Şekildeki tibianın düzlemsel hareket yaptığı düşünüldüğünde, tibianın serbestlik derecesi kaçtır?

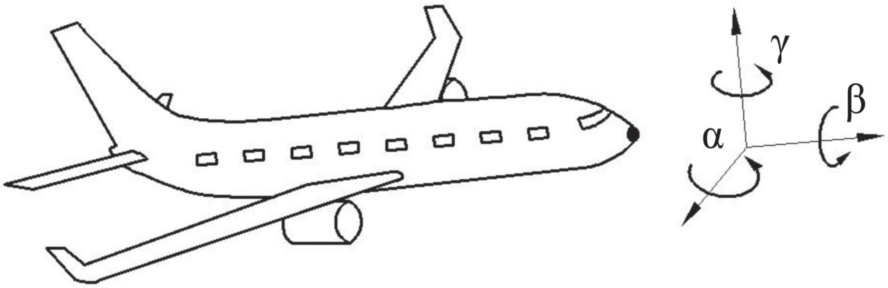


Tibia, geometrisi değişmeyen düzlemsel basit bir fiziksel eleman gibi ele alınır ve ağırlık merkezinin koordinatları (x_1,y_1) ve yatay ile yaptığı açı da α ile gösterilirse serbestlik derecesi aşağıdaki gibi bulunabilir.



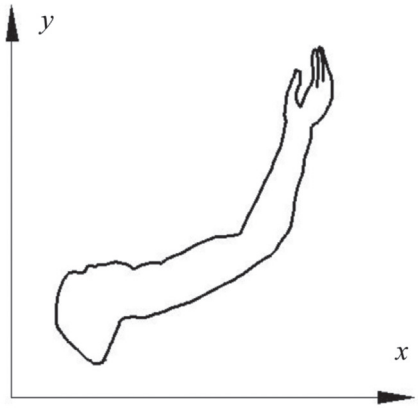
SD = 3; x_1, y_1, α (α yönelim açısıdır).

Örnek: Gökyüzünde seyreden bir uçağın serbestlik derecesi kaçtır?

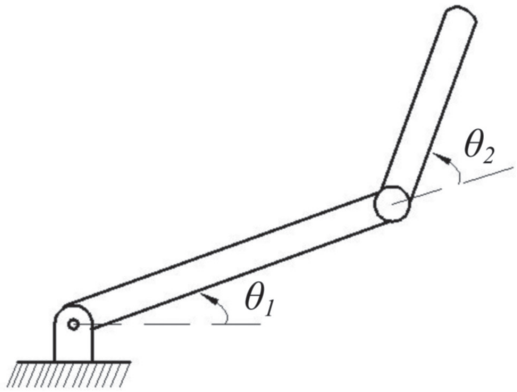


SD = 6
$x, y, z \rightarrow$ Pozisyon parametreleri
$\alpha, \beta, \gamma \rightarrow$ Yönelim açıları
Burada α yükselme açısını (pitch angle), β dönme açısını (roll angle) ve γ sapma açısını (yaw angle) göstermektedir.

Örnek: Düzlemsel hareket yapan şekildeki ön ve üst kolun serbestlik derecesi (SD) kaçtır? Omuz ekleminin konumunu sabit, el ve ön kolu ise rijit, tek bir cisim olarak düşununüz.

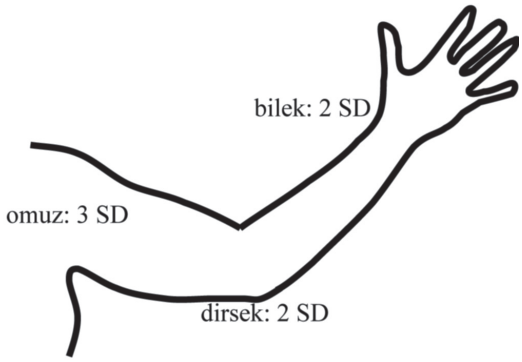


Omuz ve ön-üst kol sisteminin basitleştirilmiş fiziksel modeli aşağıda gösterilmiştir.



SD = 2; θ_1, θ_2

Örnek:
İnsan kolu, el ve parmak eklemleri dikkate alınmadığında, kaç serbestlik derecelidir?



Toplam: 3+2+2 = 7 SD

Statik Denge

Bir cisim ya da nokta hareketsiz duruyorsa ya da sabit hızla hareket ediyorsa "statik denge altındadır" denir. Buna göre statik denge koşulunun sağlanması için, bir nokta ya da cisme etkiyen bütün kuvvet ve momentlerin vektörel toplamlarının sıfıra eşit olması gerekir. Statik dengenin korunabilmesi için Newton'un 1. hareket kanunu sağlanmalıdır.

$\sum \mathbf{F} = 0$

$\sum \mathbf{M} = 0$

Newton'un 2. hareket kanunu $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ şeklindedir. Sabit hızla hareket etmek demek ivmenin sıfıra eşit olması demektir.

$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m.0 = 0$

Dolayısıyla statik denge, ivmenin sıfır olduğu dinamik denge denklemi ile de ifade edilir. Uzayda (3-boyutlu ortam) bir cismin statik dengesi aşağıdaki 6 denklem ile ifade edilebilir:

$\sum \mathbf{F}_x = 0 \qquad \sum \mathbf{F}_x = 0$

$\sum \mathbf{F}_y = 0 \qquad \sum \mathbf{F}_y = 0$

$\sum \mathbf{F}_z = 0 \qquad \sum \mathbf{F}_z = 0$

Burada $\sum \mathbf{F}_x$, $\sum \mathbf{F}_y$ ve $\sum \mathbf{F}_z$ sırasıyla x, y ve z eksenleri doğrultusunda etkiyen kuvvetlerin vektörel toplamlarını göstermektedir. $\sum \mathbf{M}_x$, $\sum \mathbf{M}_y$ ve $\sum \mathbf{M}_x$ ise sırasıyla x, y ve z eksenleri etrafında cisme etkiyen momentlerinin toplamını ifade etmektedir.

Düzlemde (2-boyutlu ortam) bir cismin statik dengesi, x-y düzlemi dikkate alınarak aşağıdaki denklemlerle ifade edilir.

$\sum \mathbf{F}_x = 0$

$\sum \mathbf{F}_y = 0$

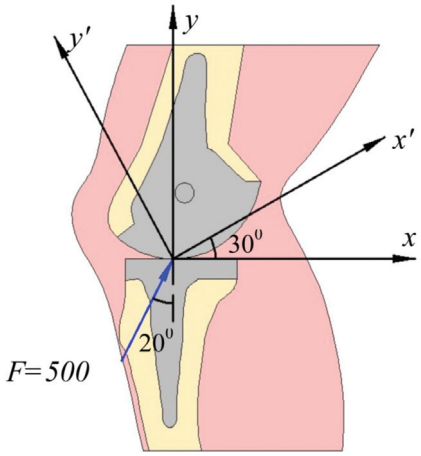
$\sum \mathbf{M}_z = 0$

Statik denge altındaki cisim ya da sistemlerin mekanik analizleri yapılırken aşağıdaki iki işlemin sırasıyla yapılması gerekmektedir.

1. Mekanik sistemin serbest cisim diyagramının çizimi
2. Statik denge denklemlerinin uygulanması

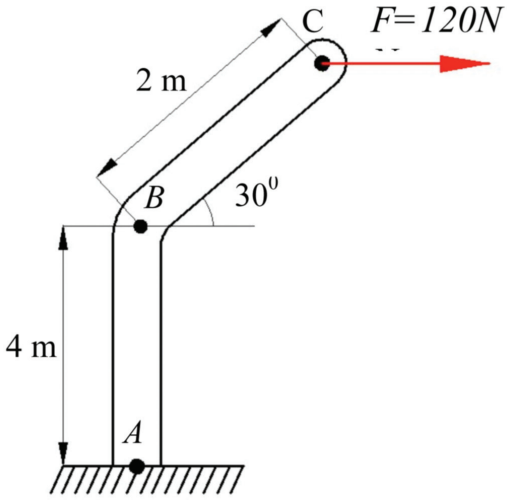
Moment Hesabı ve Statik Denge Üzerine Çeşitli Problemler

1. Şekilde *F=500 N* büyüklüğündeki kuvvet, diz protezine düşeyle 20^0 açı yapacak şekilde etkimektedir. Başlangıç düzlemi olan *x-y* düzlemi saat yönünün tersine 30^0 döndürülerek *x′- y′* düzlemi elde edilmiştir. *F* kuvvetinin *x* ve *y′* eksenlerindeki bileşenlerini bulunuz

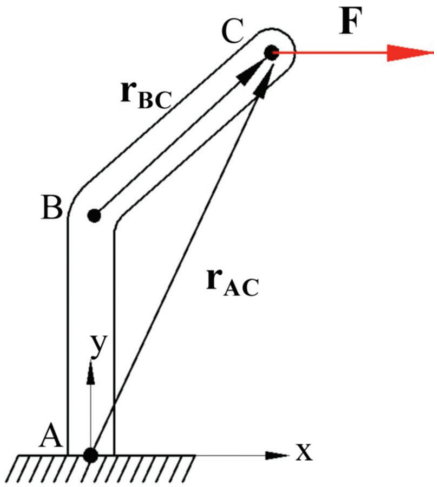


Çözüm: *F* kuvvetinin *x* eksenindeki bileşeni,
$F_x = F \sin 20 = -500 \times \sin 20 = 171\ N$ bulunur. *y′* ekseni doğrultusundaki bileşeni ise,
$F_y = F \cos 50 = 500 \times \cos 50 = 321{,}39\ N$ bulunur.

2. Şekildeki *F* kuvvetinin A ve B noktalarında oluşturduğu momentleri vektörel çarpım yöntemini kullanarak hesaplayınız.



Çözüm = Sistemde *A* ve *B* noktalarındaki oluşan momentlerin bulunması için hem kuvveti hem de aşağıdaki şekilde gösterilen noktaların pozisyonunu vektörel olarak göstermek gerekir.



İlk adım olarak *A*, *B* ve *C* noktalarının *x*-*y* düzlemindeki koordinatları bulunur.
A noktası için; $(x_A, y_A) = (0,0)$
B noktası için; $(x_B, y_B) = (0,4)$
C noktası için; $(x_C = 2.cos30 = 1.73$ ve $y_C = 4 + 2.sin30 = 5$ olmak üzere $(x_C, y_C) = (1.73,5)$ elde edilir.

Koordinatlardan faydalanarak $\mathbf{r}_{AC}$ ve $\mathbf{r}_{BC}$ pozisyon vektörleri bulunabilir;

$$\boldsymbol{r}_{AC} = (x_C - x_A)\mathbf{i} + (y_C - y_A)\mathbf{j} = (1.73 - 0)\mathbf{i} + (5 - 0)\mathbf{j}$$

$$\boldsymbol{r}_{AC} = 1.73\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$$

$$\boldsymbol{r}_{BC} = (x_C - x_B)\mathbf{i} + (y_C - y_B)\mathbf{j} = (1.73 - 0)\mathbf{i} + (5 - 4)\mathbf{j}$$

$$\boldsymbol{r}_{BC} = 1.73\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

Uygulanan **F** kuvveti *x*-doğrultusunda etkidiği için vektörel olarak ;
F = 120i *N* şeklinde ifade edilebilir.
A noktasında oluşan moment;

$$\mathbf{M}_A = \boldsymbol{r}_{AC} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M}_A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1.73 & 5 & 0 \\ 120 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$\mathbf{M}_A$ = - 600**k** *Nm* bulunur.

B noktasında oluşan moment;

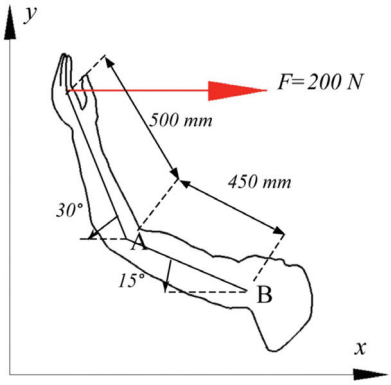
$$\mathbf{M_B} = \boldsymbol{r}_{\mathbf{BC}} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M_B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1.73 & 1 & 0 \\ 120 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$\mathbf{M_B} = -\ 120\mathbf{k}\ Nm$ bulunur.

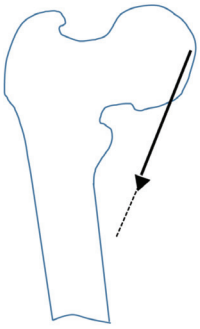
A noktasında *xy* düzlemine dik doğrultuda -600Nm (saat yönü doğrultusu) ve B noktasında da *xy* düzlemine dik doğrultuda -120 Nm (saat yönü doğrultusu) büyüklüğünde moment oluşmaktadır.

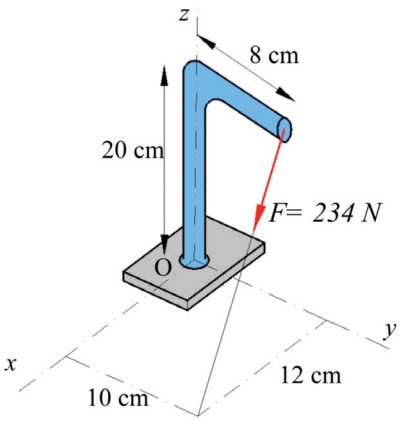
3. Şekildeki elin üst noktasına yatay olarak uygulanan *F=120 N* büyüklüğündeki kuvvetin dirsek (*A* noktası) ve omuz (*B* noktası) eklemleri etrafında (anterior-posterior eksenleri etrafında) oluşturduğu momentleri hesaplayınız.



Cevap = ($\mathbf{M_B}$ = - 73300**k** Nmm ve $\mathbf{M_A}$ = - 50000**k** Nmm)

4. Koksa vara deformitesi bulunan şekildeki femur kemiğinin başına 234 N büyüklüğünde kuvvet etki etmektedir. Bu kuvvetin, *O* noktası etrafında oluşturduğu momentin *x*, *y* ve *z* eksenleri çevresindeki bileşenlerini hesaplayınız.





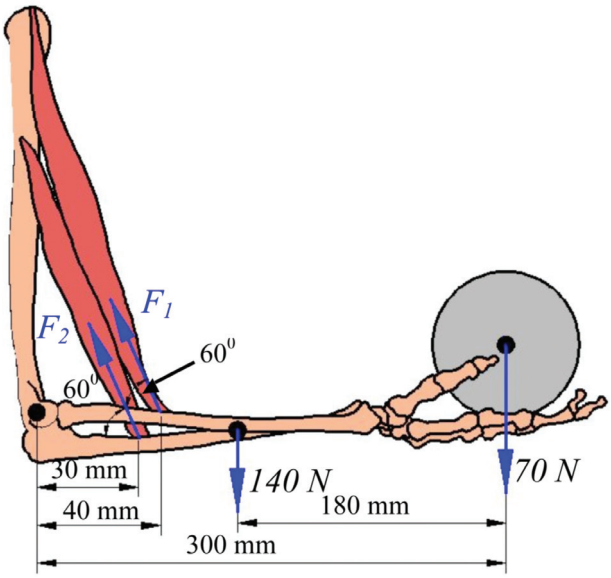
4. Koksa vara deformitesi bulunan şekildeki femur kemiğinin başına 234 N büyüklüğünde kuvvet etki etmektedir. Bu kuvvetin, *O* noktası etrafında oluşturduğu momentin *x*, *y* ve *z* eksenleri çevresindeki bileşenlerini hesaplayınız.

Uygulanan kuvvet **F** = 120i + 20j - 200**k** ve kuvvet ile *O* noktası arasındaki pozisyon vektörü **r** = 8j + 20k olmak üzere

$\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ bağıntısı kullanılarak

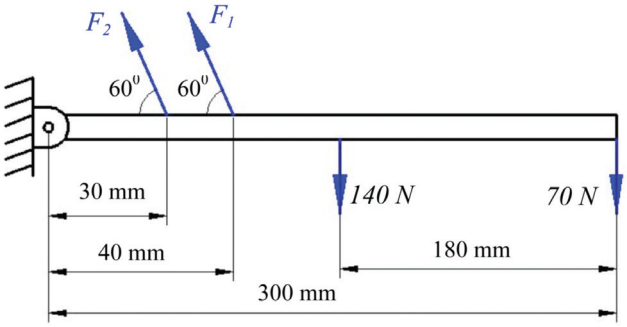
$\mathbf{M}_0 = -2000\mathbf{i} + 2400\mathbf{j} + 960\mathbf{k}$ ve $\mathbf{M}_X = -2000\mathbf{i}$ Ncm, $\mathbf{M}_Y = 2400\mathbf{j}$ Ncm ve $\mathbf{M}_Z = -960\mathbf{k}$ Ncm elde edilir.

5. Biceps kasının kesit alanı Brachialis kasının kesit alanının yaklaşık 2,5 katıdır. Şekildeki kas-iskelet sisteminin statik denge halini koruyabilmesi için Biceps (F_1) ve Brachialis (F_2) kaslarının üretmesi gereken kuvvetler ne olmalıdır? Ayrıca dirsek ekleminde oluşan reaksiyon kuvvetini hesaplayınız.

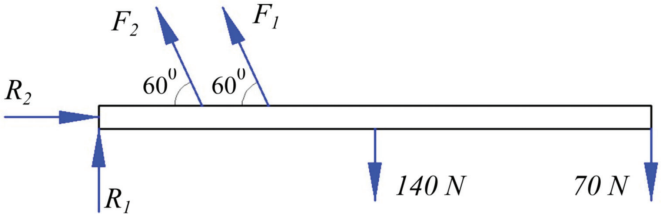


Çözüm: Kasların üretebileceği maksimum kuvvet değerleri maksimum kesit alanları ile doğru orantılıdır. Burada bir yaklaşım yapılarak Biceps kasının üreteceği kuvvetin Brachialis'in üreteceği kuvvetten 2.5 kat fazla olduğu varsayımında bulunulabilir. Böylece $F_1 = 2{,}5\ F_2$ olur.

Problemin çözümü için öncelikle mekanik model oluşturulmalıdır.



Ardından serbest cisim diyagramı (SCD) çizilir. Dirsek eklemi basit mesnet şeklinde modellendiğinden dolayı, bu eklemde oluşacak reaksiyon kuvvetinin düşey (R_1) ve yatay (R_2) doğrultuda etki eden iki bileşeni vardır.



Statik denge denklemleri uygulanarak, SCD'da gösterilen bilinmeyen kuvvetlerin (R_1, R_2, F_1, F_2) çözümü bulunur.

$$\Sigma F_x = 0$$

$$R_2 - F_1 \cos 60 - F_2 \cos 60 = 0$$

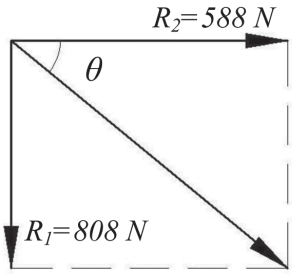
$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_1 + F_1 \sin 60 + F_2 \sin 60 - 140 - 70 = 0$$

$$\Sigma M_R = 0$$

$$F_1 40 \sin 60 + F_2 30 \sin 60 - 140.120 - 70.300 = 0$$

F_1=2,5 F_2 eşitliği denklemlerde yerine konulur ve bu denklemler çözülürse,
F_2=336 N, F_1=840 N ve R_1 = -808 N, R_2 = 588 N değerleri elde edilir. Dirsek ekleminde oluşan reaksiyon kuvvetini hesaplamak için, bu kuvvetin bileşenlerinden yararlanılır.



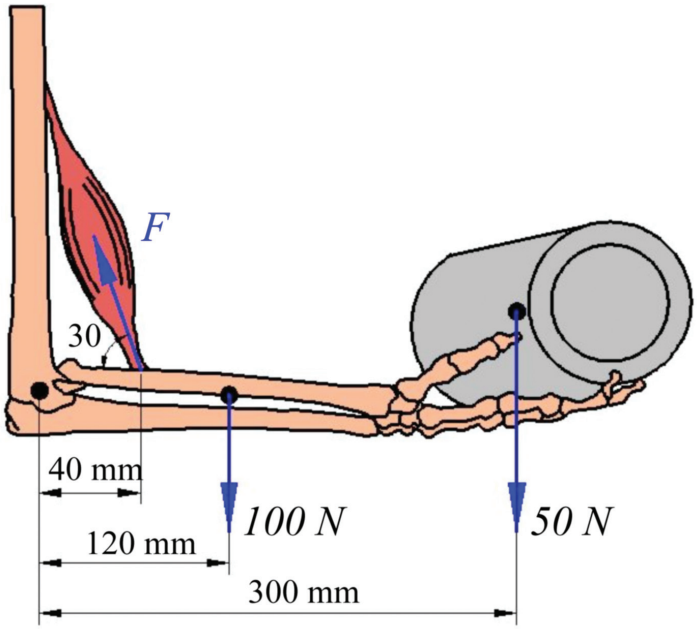
$$\tan\theta = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{R_1}{R_2}\right) = \theta$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{808}{588}\right) = \theta$$

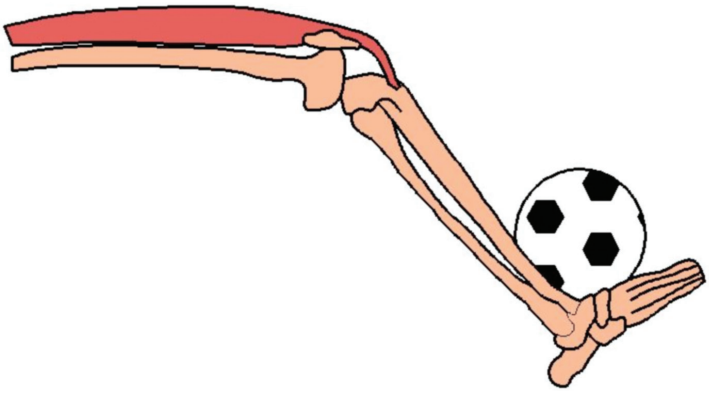
$\theta = 53.9^0$ olarak bulunur.

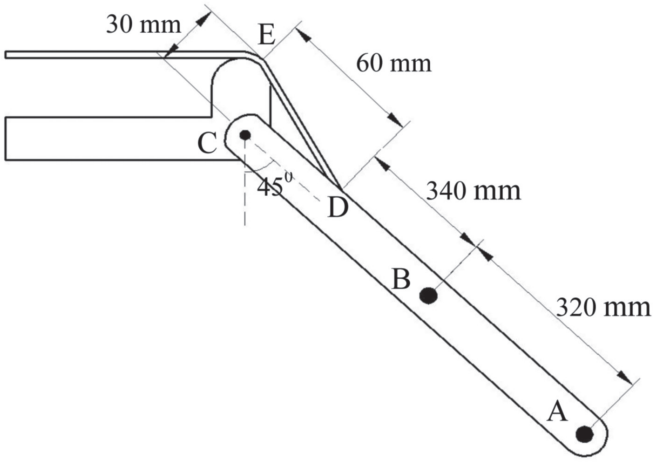
6. Şekildeki kas-iskelet sistemi modeli statik denge altındadır. Bu dengenin korunabilmesi için izometrik kasılma halinde bulunan Biceps kasının ürettiği kuvveti *F* hesaplayınız.



Cevap = (*F* = 1350 N)

7. Şekildeki statik denge altında bulunan diz eklemi ekstansiyon hareketi yapacak şekilde dönmeye zorlanmaktadır. Bu durumda Quadriceps kası izometrik olarak kasılmaktadır. Kasın uygulaması gereken kuvveti (*F*) ve dizde oluşan reaksiyon kuvvetini hesaplayınız. Ayak ağırlığı 20 N ve ayağın üstünde duran topun ağırlığı 10 N olup *A* noktasına etkimektedir. Baldırın (tibia+fibula kemiklerinin oluşturduğu uzuv) ağırlığı 35 *N* olup *B* noktası bu bölgenin ağırlık merkezi kabul edilmektedir.





Cevap: Kasın uygulaması gereken kuvvet $F=924\ N$, Reaksiyon kuvvetleri; $R_1 = -373.6\ N$, $R_2 = 777.3\ N$.

3. Dinamik

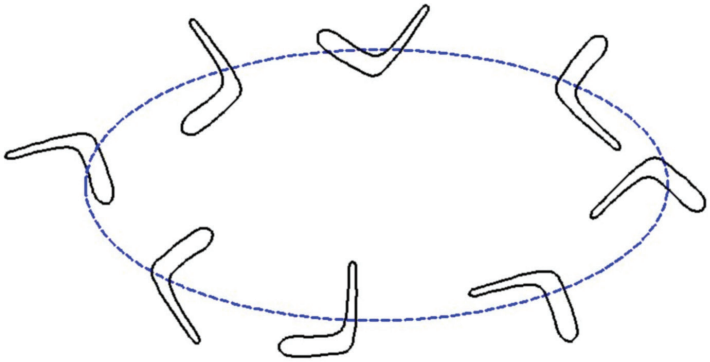
Dinamik konusu Kinematik ve Kinetik alt başlıklarında incelenecektir. Kinematik, hareket halindeki bir sistemin *konum* (*pozisyon*), *hız* ve *ivmesini*, bunların oluşmasını sağlayan *kuvvet* ya da *moment* etkisini dikkate almadan inceleyen mekaniğin alt dalıdır. Kinetik ise kinematikten farklı olarak doğrudan bir sisteme etkiyen kuvvet ve moment etkisini inceleyen bilim dalıdır. (4)

Kinematik

Bu bölümde biyomekanik sistem ya da modellerin düzlemsel hareketi ele alınacaktır.

Hareket, dinamik konusu kapsamında *öteleme*, *dairesel* (rotasyon - bir eksen etrafında dönme) ve bunların her ikisini de içeren *genel düzlemsel hareket* olarak ayrı ayrı incelenebilir. An-

cak bu bölüm kapsamında hareket tipleri ayrı ayrı ele alınmayacak ve yalnızca en genel hareket davranışını karakterize eden *genel düzlemsel hareket* incelenecektir. Örneğin, bumerangın havadaki ya da temporomandibular eklemin hareketi hem rotasyon (dönme) hem de öteleme hareketlerini birlikte içermektedir.



Bumerangın hem dönme hem de yer değiştirme hareketinin olduğu *genel düzlemsel hareketi.*

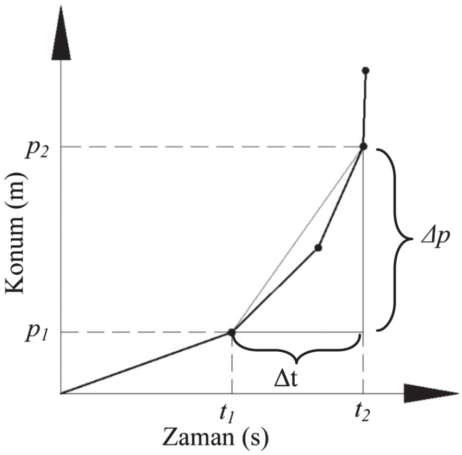
Lineer Kinematik

Lineer kinematik, doğrusal hareket sırasındaki konum (pozisyon), hız ve ivme büyüklüklerinin analizi ile ilgilidir. Hız (v), konumun birim zamandaki değişimidir ve ortalama hız değeri;

$v = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_s - p_i}{t_s - t_i}$ bağıntısı ile hesaplanır. Birimi m/s ile ifade edilir.

Denklemde p_s, p_i, t_s ve t_i sırasıyla son konumu, ilk konumu, hareketin bitiş ve başlangıç zamanlarını göstermektedir.

Konum-zaman grafiğinde iki noktadan geçen doğrunun eğimi ortalama hıza eşittir (Şekil 7).



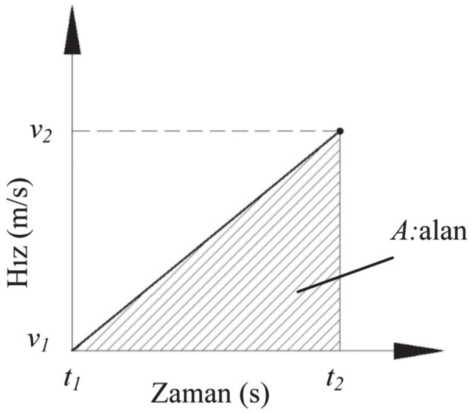
Şekil 7. t_1 anında p_1, t_2 anında p_2 konumunda bulunan bir cismin ortalama hızı bu iki noktayı birleştiren doğrunun eğimidir.

Ortalama hız yerine anlık hız hesaplanmak istenirse, bu durumda konumun zamana göre birinci mertebeden türevini hesaplamak gerekir.

Not: Türev, bir büyüklüğün bir parametreye göre değişimini veren matematiksel bir işlemdir. Örneğin konumun zamana göre değişimi belirlenmek istenirse, yani hız belirlenmek istenirse, konumun zamana göre türevinin hesaplanması gerekir.

$$v = \frac{dp}{dt} = \dot{p}$$

Hız-zaman grafiğinin altında kalan alan hesaplanırsa konum bilgisine ulaşılır (Şekil 8).

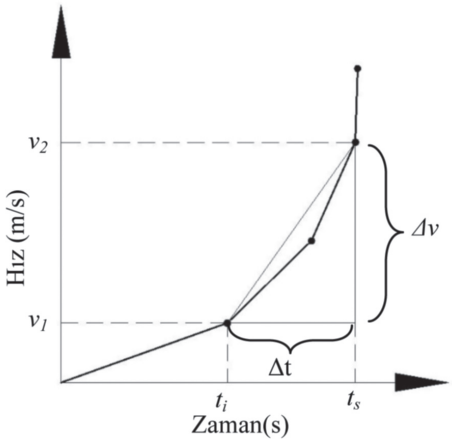


Şekil 8. Hız-zaman eğrisinin altında kalan alan konuma eşittir.

İvme (a), hızın birim zamandaki değişimidir ve ortalama ivme değeri;

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_s - v_i}{t_s - t_i}$$ eşitliği ile elde edilir.

Denklemde V_s ve V_i son ve ilk hız değerlerine eşittir. İvmenin birimi m/s^2 ile ifade edilir. Hız- zaman grafiğinde iki noktadan geçen doğrunun eğimi ortalama ivmeye eşittir (Şekil 9).

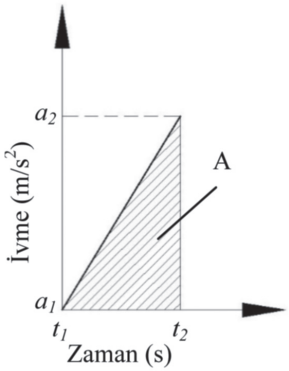


Şekil 9. t_1 anında v_1, t_2 anında v_2 hızına sahip olan bir cismin ortalama ivmesi bu iki noktayı birleştiren doğrunun eğimidir.

Anlık ivme değerini hesaplamak için hızın zamana göre 1.mertebeden türevini hesaplamak gerekir.

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{p}$$

İvme-zaman grafiğinin altında kalan alanın toplamı hıza eşittir (Şekil 10).



Şekil 10. İvme-zaman eğrisinin altında kalan alan konuma eşittir.

Örnek:

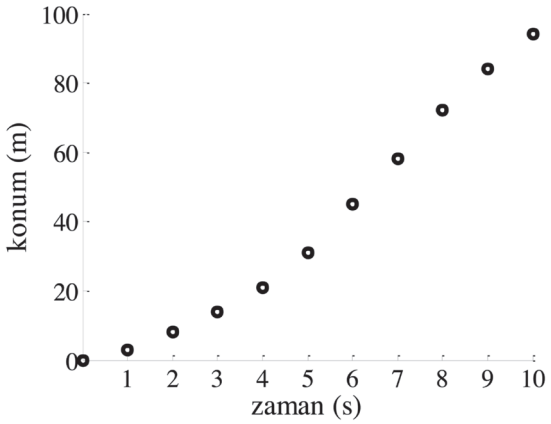
Zaman (s)	Konum (m)
0	0
1	3
2	8
3	14
4	21
5	31
6	45
7	58
8	72
9	84
10	94

Yandaki tabloda, bir kısa mesafe koşucusuna ait konum ve zaman verileri gösterilmiştir.

a) Konum-zaman grafiğini çiziniz.
b) Koşucunun hareketin başlangıcından sonuna kadar olan süredeki ortalama hızını m/s ve km/saat cinsinden bulunuz.
c) Eğri uydurma (curve fitting) yöntemlerinden birini kullanarak (örneğin en küçük kareler yöntemi) konum verisinin zamana bağlı 3. dereceden polinomik fonksiyonunu elde ediniz. Bu eğrinin grafiğini ham veriler üzerine çiziniz.
d) Elde edilen eğrinin denklemini kullanarak koşucunun 3. ve 10. saniyelerdeki anlık hızlarını hesaplayınız.
e) Elde edilen eğrinin denklemini kullanarak koşucunun 3. ve 10. saniyelerdeki anlık ivmesini hesaplayınız.
f) Elde edilen hız ve ivme denklemlerini kullanarak hız ve ivme grafiklerini çiziniz.
g) Hız değişiminin olmadığı (hızın sabit kaldığı) zaman anını belirleyiniz.
h) 10 saniyelik süre içerisinde koşucunun hızının ve ivmesinin nasıl bir değişim gösterdiğini belirtiniz. Grafikleri fiziksel anlamda değelendiriniz.

Çözüm

a. Verilerin grafiği



b. Ortalama hız

$$V = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{94-0}{10-0} = 9.4 \text{ m/s}$$

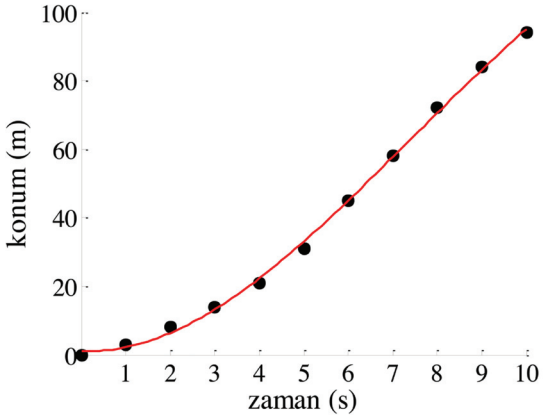
Ortalama hızı km/saat cinsinden hesaplamak istersek

$$V = 9.4 \times \frac{0,001\text{km}}{1/3600\,\text{saat}} = 9,4 \times 3,6 = 33,84\,\text{km/saat}$$

c. En küçük kareler yöntemi (least squares method) kullanılarak zamana bağlı 3. dereceden bir fonksiyon olarak elde edilen konum denklemi

$P(t) = -0.082t^3 + 1.831t^2 - 0.721t + 1.154$ şeklinde elde edilebilir.

Bu denklemin grafiği aşağıdaki gibidir.



d $P(t) = -0.082t^3 + 1.831t^2 - 0.721t + 1.154$ denklemini kullanarak koşucunun 3. ve 10. saniyelerdeki anlık hızlarını hesaplamak için denklemin zamana göre birinci mertebeden türevini almak gerekir. Buna göre,

$$\frac{dP}{dt} = V(t) = 3\times(-0.082)t^2 + 2\times(1.831)t - 1\times(0.721)t^0$$

$$V(t) = -0.246t^2 + 3.662t - 0.721$$

elde edilir. t = 3. ve 10. saniyedeki hızlar ise

$$V(3) = -0.246(3)^2 + 3.662(3) - 0.721 = 8,51\,\text{m/s}$$

$$V(10) = -0.246(10)^2 + 3.662(10) - 0.721 = 11.3\,\text{m/s}$$

şeklinde elde edilir. Sonuçlardan anlaşılmaktadır ki koşucunun 10. saniyedeki hızı 3. saniyedekinden 2,79 m/s daha fazladır.

e. $P(t) = -0.082t^3 + 1.831t^2 - 0.721t + 1.154$ denklemini kullanarak koşucunun 3. ve 10. saniyelerdeki anlık ivmelerini hesaplamak için konum denkleminin zamana göre ikinci mertebeden ya da hız denkleminin birinci mertebeden türevini almak gerekir. Buna göre ivme,

$$\frac{dV}{dt} = a(t) = 2\times(-0.246)t + 1\times(3.662)t^0$$

$$a(t) = -0.492t + 3.662$$

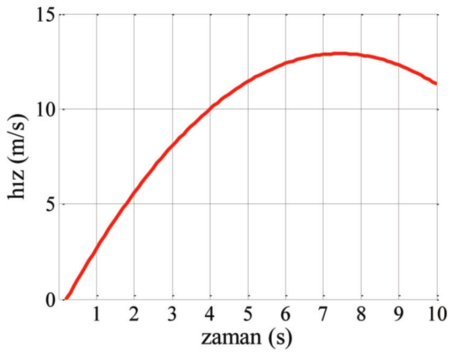
şeklinde elde edilir. t = 3. ve 10. saniyedeki ivmeler ise

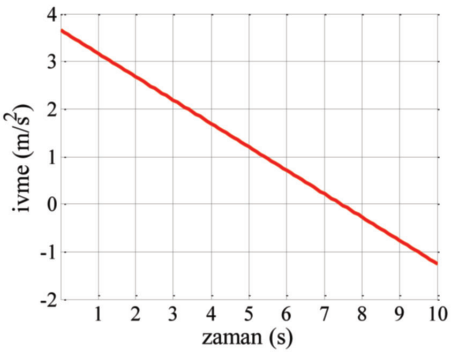
$$a(t) = -0.492(3) + 3.662 = 2.186\,\text{m/s}^2$$

$$a(t) = -0.492(10) + 3.662 = -1.258\ \text{m/s}^2$$

olarak bulunur. Sonuçlardan anlaşılmaktadır ki koşucu 3. saniyede hızını arttırmakta (ivmenin pozitif olmasından dolayı), ancak 10. saniyede ise azaltmaktadır (ivmenin yönünün negatif olmasından dolayı).

f. Hız ve ivme grafikleri aşağıdaki şekillerde verilmiştir.





g. Hızın sabit kaldığı zaman anı, yukarıda hız-zaman grafiğinden belirlenebilir. Grafiğe göre, 7. ve 8. saniyeler arasında koşucunun hızının değişmediği görülebilir. Bununla birlikte, bu zaman bilgisi matematiksel olarak kesin bir biçimde de belirlenebilir. Bunu gerçekleştirmek için hız fonksiyonunun zamana göre birinci türevi hesaplanır (yani ivme belirlenir) ve sıfıra eşitlenir. Buradan

$a(t) = -0.492t + 3.662 = 0$ ise $t = 7.44$ s bulunur.

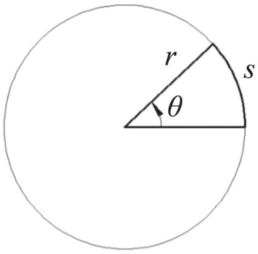
Birinci mertebeden türev, fiziksel olarak bir eğrinin eğimine karşılık geldiğinden, burada yapılan işlem aslında eğimin sıfır olduğu anı belirlemektedir.

h. Elde edilen hız ve ivme grafikleri dikkate alındığında koşucunun, başlangıç anından 7.44. saniye kadar hızını azalan bir ivmeyle arttırdığı ve bu andan itibaren hızını artan bir ivme ile azaltmaya başladığı gözlenmektedir.

Hız-zaman eğrisinin altında kalan alan konum (pozisyon) değişimine, ivme-zaman eğrisinin altında kalan alan da hız değişimine karşılık gelmektedir.

Açısal Kinematik

Açısal kinematik, dairesel (rotasyonel) hareket sırasındaki konum (açı), hız (açısal hız) ve ivme (açısal ivme) büyüklüklerinin analizi ile ilgilidir.

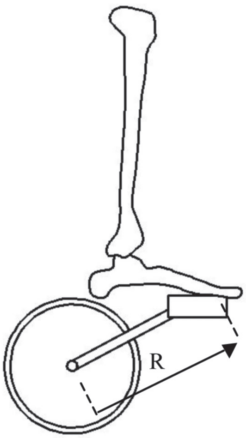


Yay uzunluğu (s) ile yarıçap (r) arasındaki ilişki;

$s = r.\theta$

θ açısı yukarıdaki bağıntıda radyan cinsinden yazılmalıdır.

Örneğin, aşağıdaki şekilde de görüleceği üzere dönme merkezinden $R = 20$ cm uzağında bulunan bir pedal 60° derece döndürülecek olursa, ayağın uç noktası



$s = 20\text{cm} \times 60 \times \pi / 180 \cong 21\text{cm}$ yol almış olur. Burada dikkat edilmesi gereken en önemli nokta, denklemde kullanılacak açı değerinin radyan cinsinden olması gerektiğidir. Bunun için aşağıdaki bağıntı kullanılır. Bağıntıda D derece cinsinden, R ise radyan cinsinden açı değerini ifade etmektedir.

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

Açısal hız ω, birim zamandaki açısal konum θ değişimidir ve ortalama olarak;

$\omega = \dfrac{\theta_s - \theta_i}{t_s - t_i}$ şeklinde hesaplanır. Denklemde θ_s ve θ_i son ve başlangıç açı değerlerini göstermektedir. Açısal hızın birimi rad/s dir. Anlık olarak

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

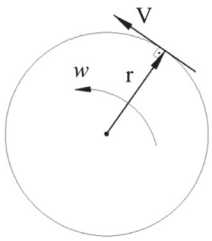
denklemiyle, yani açısal değişimin zamana göre birinci mertebeden türevi ile hesaplanır. Açısal ivme α, birim zamandaki açısal hızın ω değişimidir ve ortalama olarak;

$$\alpha = \frac{\omega_s - \omega_i}{t_s - t_i}$$

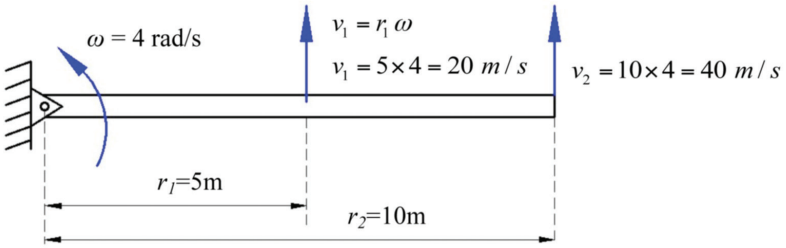
denklemiyle hesaplanır. Denklemde ω_s ve ω_i son ve başlangıç hız değerlerini göstermektedir. Anlık açısal ivme;

$$\alpha = \frac{dw}{dt} = \dot{\omega} = \dot{\theta}$$

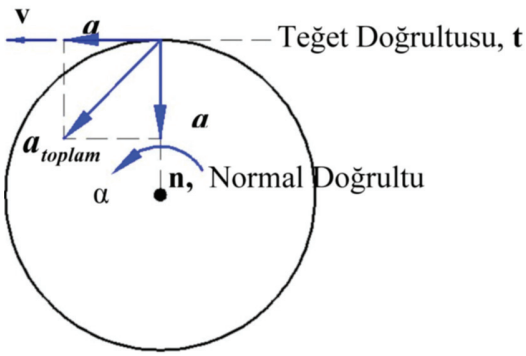
ifadesiyle hesaplanır. Lineer ve açısal hız arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır.



Örnek: Açısal hızı ω 4rad/s olan uzun ince bir fiziksel sistemin dönme ekseninden itibaren 5. ve 10. metredeki çizgisel hızlarını hesaplayınız.



Dairesel Hareket: Normal (Radyal) ve Teğetsel İvme



Eğrisel bir yörüngede hareket eden bir parçacığın çizgisel (doğrusal) hızı daima yörüngeye teğettir. Ancak bu parçacığın çizgisel ivmesi *a*, yörünge ile bir açı yapar. Çizgisel ivmenin belirlenebilmesi için bileşenlerine ayırma yoluna gidilir. Bir çizgisel ivme, normal (radyal) ve teğetsel doğrultudaki iki ivmenin vektörel toplamına eşittir. Yani,

$$\boldsymbol{a}_{Toplam} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n$$

Teğetsel ivme $\boldsymbol{a}_t$ parçacığın hızının genliğindeki değişimden kaynaklanır ve doğrultusu hareket yönüne teğet olacak şekildedir ve

$$a_t = \frac{dV}{dt} = \dot{v} = r\,\dot{\omega} = r\,\alpha$$

bağıntısı ile ifade edilir.

Normal ivme $\boldsymbol{a}_n$ ise hız vektörünün doğrultusunun zamanla değiminden kaynaklanır ve yönü her zaman dönme merkezine doğrudur (merkezcil ivme).

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{r^2\omega^2}{r} = r\,\omega^2$$

Lineer ve Dairesel Hareketler için Kullanılan Kinematik Denklemler

Hareket denklemlerinin sıklıkla kullanılan bazıları aşağıdaki tabloda özetlenmiştir.

TABLO 2. Lineer ve Dairesel Hareketler için Kullanılan Kinematik Denklemler

	Lineer (doğrusal) hareket	Dairesel (rotasyonel) hareket
Konum	p	θ
Hız	v	ω
İvme	α	α, $\ddot{\theta}$
Ortalama Hız	$v_{ort} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$	$\omega_{ort} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$
Anlık Hız	$v = \frac{dP}{dt}$	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Ortalama İvme	$\alpha_{ort} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	$\alpha_{ort} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$
Anlık İvme	$\alpha = \frac{dv}{dt}$	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
İvmenin Sabit Olduğu Durum İçin Kinematik Denklemler	$p = p_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
	$v = v_0 + \alpha t$	$\omega^2 = \omega^2_0 + \alpha t$
	$v^2 = v^2_0 + 2\alpha\,(p - p_0)$	$\omega^2 = \omega^2_0 + 2\alpha\,(\theta - \theta_0)$

Örnek:

a. Bir voleybol oyuncusunun omuz açısı, smaç hareketi esnasında 0,3 saniye içerisinde 0,5 radyandan 1 radyana değişim göstermektedir. Kolun omuz eklemi etrafındaki ortalama açısal hızını rad/s ve derece/s cinsinden hesaplayınız.

$$\omega = \frac{\theta_s - \theta_i}{t_s - t_i} = \frac{1-0,5}{0,3-0} = 1,66 \text{ rad/s}$$

Hızı derece/s cinsinden hesaplamak için ,

$$1,66\frac{rad}{s} \times \frac{180^0}{\pi} = 95,11 \text{ der/s bulunur.}$$

Bu hesaba göre sporcunun omzu, bir saniyede 95,11 derecelik bir açı katetmektedir.

b. Voleybolcunun omzu ile eli arasındaki uzunluk 70 cm ise elinin çizgisel hızını, merkezcil ivmesini ve teğetsel ivmesini hesaplayınız.

Çizgisel hız; $v = \omega r = 1,66\ \frac{rad}{s} \times 70\,cm = 116,2\ \frac{cm}{s}$

Merkezcil (normal) ivme,

$$a_n = r\,\omega^2 = 70\,cm\,(1,66\frac{rad}{s})^2 = 192,9\ \frac{cm}{s^2}$$

c. Voleybolcunun omuz eklemi etrafındaki açısal hızı 0,2 s içerisinde 1,90 rad/s değerine artıyorsa teğetsel ivmenin değeri ne olur?

$$a_t = r.\alpha = r.\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = 70\,cm\frac{1,90-1,66}{0,2}\frac{r}{s^2} = 8,4\ \frac{cm}{s^2} \text{ olarak bulunur.}$$

Kinetik Analiz

Newton-Euler Yöntemi

Kuvvet ya da moment etkisi altındaki bir mekanik sistemin kinetik analizi, kinematik parametreleri dikkate alınmaksızın yalnızca kuvvet ve momentin yarattığı etkinin incelenmesi ile gerçekleştirilir. Örneğin, yarış sırasındaki bir 100 m koşucusunun vücudundaki kasların eklemlerde oluşturduğu momentlerin hesabı kinetik analizin konusudur. Eğer bu koşucunun belli zaman aralıklarındaki konum, hız ya da ivme bilgileri elde edilmek istenirse bu kinematik analizin alanına girer.

İvmenin sıfır olduğu (ya durağan hal ya da sabit hızla yapılan hareket) durumlarda statik denge denklemlerinin kullanılması gerektiği önceki konularda belirtilmişti.

İvmeli hareketin gerçekleştiği durumlarda ise Newton-Euler denklemleri kullanılarak dinamik denge altındaki sistemlerin kuvvet-moment analizi gerçekleştirilebilir.

Doğrusal ivmeli bir hareket için kullanılacak hareket denklemi,

$\sum F = m.\alpha$

Dairesel bir hareket için ise,

$\sum \boldsymbol{M} = l.\alpha'$dir.

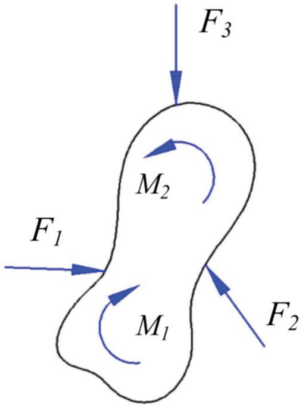
F kuvvet, **M** moment, ***a*** çizgisel ivme, *I* kütle atalet (eylemsizlik) momenti ve α açısal ivmedir. Hareket denklemi, bir sistemin kinetik ve kinematik büyüklükleri arasındaki ilişkinin matematiksel ifadesidir.

Eylemsizlik bir cismin mevcut durumunu koruma eğilimidir. Duran bir cisim durmak, hareketli bir cisim ise hareketini sürdürmek eğilimindedir. Kütle atalet momenti (eylemsizlik momenti) ise dönme hareketi yapan bir cismin dönme eylemsizliğidir. Duran ya da doğrusal hareket yapan bir cismin eylemsizliği cismin kütlesi *m* iken, dönen bir cismin eylemsizliği de eylemsizlik momentidir *I*. Atalet momenti, *i)* cismin kütle dağılımı ile dönme ekseni arasındaki mesafeye *r* ve *ii)* cismin kütlesine bağlı bir parametredir. En genel hal için

$\boldsymbol{I} = \int r^2 dm$ bağıntısı ile hesaplanır.

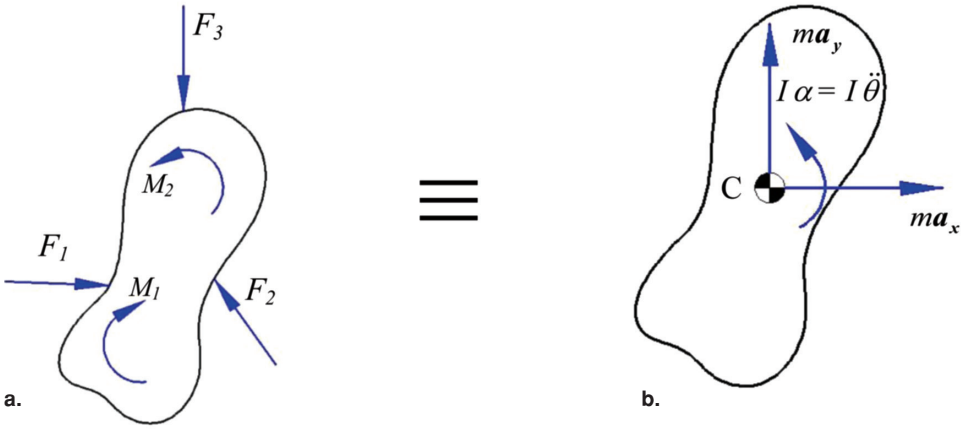
Çeşitli geometrilerdeki cisimlerin atalet momenti denklemleri için bu bölümün sonundaki *Ek* kısmına bakınız.

Örnek: Şekildeki dinamik denge halinde bulunan *m* kütleli bir cisme F_1, F_2, F_3 kuvvetleri ile M_1 ve M_2 momentleri etkimektedir. Newton-Euler yaklaşımı ile cismin dinamik denge denklemlerini yazınız.



Çözüm:

Şekil 11a'daki cisme etki eden dış kuvvetler (F_1, F_2, F_3) ve momentlerin (M_1, M_2) eşdeğer eylemsizlik kuvvet ve momentleri, şekil 9b'de *C* (centroid-ağırlık merkezi) noktasında gösterilmiştir.



Şekil 11. a. Cisme etkiyen dış kuvvet ve momentler. **b.** Eşdeğer eylemsizlik kuvvet ve momentleri

Buradan,

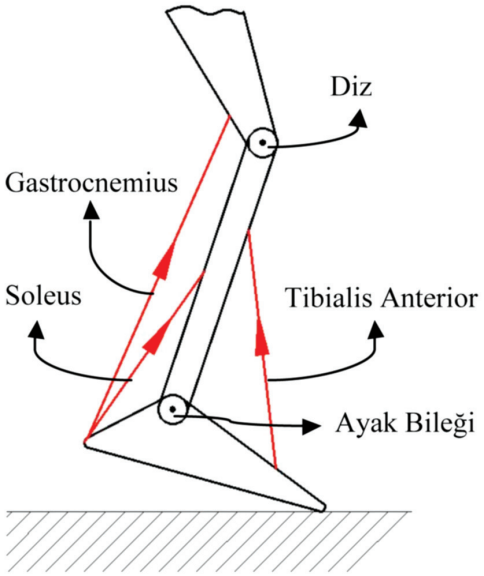
$$\sum \boldsymbol{F_x} = m\boldsymbol{a_x} \Rightarrow F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = m\,a_x$$

$$\sum \boldsymbol{F_y} = m\boldsymbol{a_y} \Rightarrow F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = m\,a_y$$

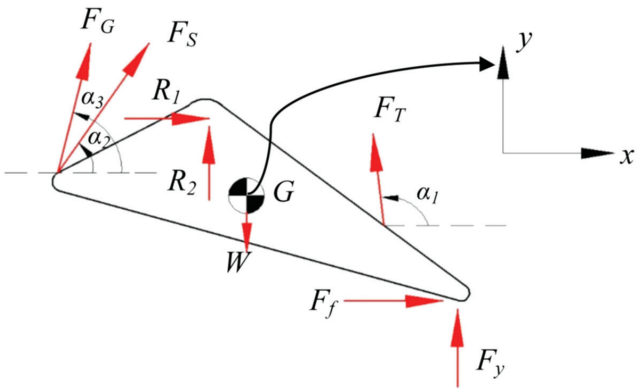
$$\sum \boldsymbol{M_c} = I\,\boldsymbol{\alpha} \Rightarrow r_1 \times F_1 + r_2 \times F_{2x} + r_3 \times F_{3x} + \mathbf{M_1} + \mathbf{M_2} = I\,\boldsymbol{\alpha}$$

dinamik denge denklemleri yazılabilir. Denklemlerdeki r_1, r_2 ve r_3 sırasıyla F_1, F_2 ve F_3 kuvvetlerinin C noktasına pozisyon vektörleridir.

Örnek: Şekilde bir kas- iskelet sistemi modeli görülmektedir. Yürüme hareketi yapıldığı esnadaki ayağın hareket denklemlerini Newton- Euler yaklaşımı ile elde ediniz.



Mekanik analizde ilk aşama serbest cisim diyagramının çizilmesidir.
Ayağın serbest cisim diyagramı:



Serbest cisim diyagramında gösterilen cisme etki eden dış kuvvetler:
F_G: Gastrocnemius (GA) kasının kuvveti
F_S: Soleus (SO) kasının kuvveti
F_T: Tibialis Anterior (TA) kasının kuvveti
W: Ayağın ağırlığıdır.
Reaksiyon (tepki) kuvvetleri ise,
R_1, R_2: Basit mesnet olarak modellenen ayak bileğine oluşan reaksiyon kuvvetleri
F_y: Yer tepki kuvveti
F_F: Sürtünme kuvvetidir.

Newton-Euler yöntemine göre dinamik denge altında bulunan bir cismin hareket denklemleri

$\sum \boldsymbol{F} = m.\alpha$ ve

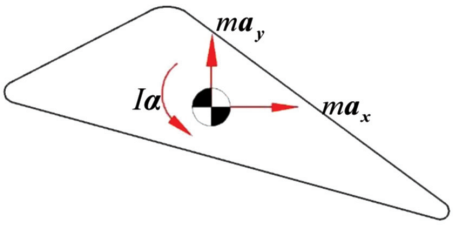
$\sum \boldsymbol{M} = I_G.\alpha$ bağıntıları ile elde edilir.

Denklemlerde m ayağın kütlesi, $\boldsymbol{a}$ çizgisel ivme, I_G ağırlık merkezine (G) göre ayağın atalet momenti ve α ise açısal ivmedir. Örnekteki kas-iskelet modeli için bu denklemler aşağıdaki biçimde yazılabilirler.

$\sum \boldsymbol{F}_x = m.\alpha_x$ ve

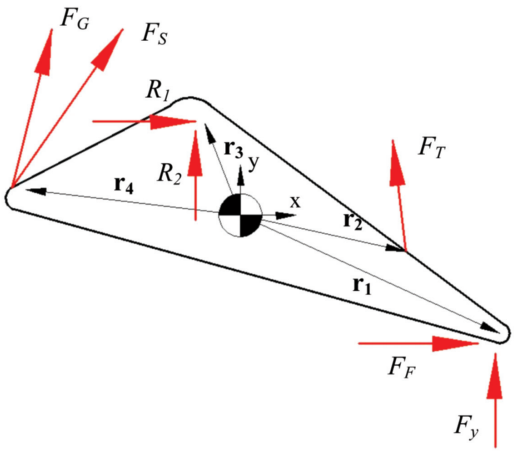
$\sum \boldsymbol{F}_y = m.\alpha_y$

$\sum \boldsymbol{M}_c = I_G.\alpha$



Ayak bileğinin kütle merkezinin çizgisel ivmesinin x bileşeni $\boldsymbol{a}_x$, y bileşeni $\boldsymbol{a}_y$ ve açısal ivmesi α'dır.

Ağırlık merkezine göre moment (M_G) hesabını yapabilmek için ağırlık merkezi G ile kuvvetlerin uygulama noktaları arasındaki pozisyon vektörlerinin yazılması gerekir.



Buradan

$$\sum \boldsymbol{F_x} = R_1 + F_G.cos\alpha_3 + F_S.cos\alpha_2 + F_T.cos\alpha_1 + F_F = m.a_x$$

$$\sum \boldsymbol{F_y} = R_2 + F_G.sin\alpha_3 + F_S.sin\alpha_2 + F_T.sin\alpha_1 - W = m.a_y$$

$$\sum \boldsymbol{M_G} = \boldsymbol{r_1} \times \boldsymbol{F_y} + \boldsymbol{r_1} \times \boldsymbol{F_F} + \boldsymbol{r_2} \times \boldsymbol{F_T} + \boldsymbol{r_3} \times \boldsymbol{R_1} + \boldsymbol{r_3} \times \boldsymbol{R_2} + \boldsymbol{r_4} \times \boldsymbol{F_S} + \boldsymbol{r_4} \times \boldsymbol{F_G} = I_G.\boldsymbol{\alpha}$$

elde edilir.

Bir yürüme analizi laboratuarında ayağa ait konum ($\boldsymbol{r_1}$, $\boldsymbol{r_2}$, $\boldsymbol{r_3}$, $\boldsymbol{r_4}$) ve ivme ($\boldsymbol{a_x}$, $\boldsymbol{a_y}$, α) verisi ile yer tepki kuvvetlerinin (F_F, F_y) ölçülebildiğini varsayalım. Bu durumda, 3 tane statik denge denklemine karşılık 5 tane bilinmeyen (R_1, R_2, F_G, F_S, F_T) kalmaktadır. Bu bilinmeyenlerin klasik cebirsel yöntemlerle çözümü mümkün değildir ve çeşitli alternatif yöntemlerin (optimizasyon gibi) kullanılması gerekir.

Lagrangian Yöntemi

Newton-Euler yönteminden farklı olarak Lagrangian yaklaşımında, mekanik sistemlerin enerji denklemleri temel alınarak hareket denklemleri elde edilmektedir. Dolayısıyla skaler bir yöntemdir ve çok eklemli karmaşık sistemler için Newton-Euler yöntemine göre daha kolay uygulanabilen bir yöntemdir.

Lagrange denklemi aşağıdaki formda verilebilir.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial P}{\partial q_i} = Q_i$$

Denklemde

q_i: Genelleştirilmiş koordinat, i indisi genelleştirilmiş koordinat sayısı,

K: Kinetik enerji denklemi,

D: Sönüm terimi,

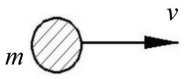
P: Potansiyel enerji denklemi, ve

Q_i: Genelleştirilmiş kuvvettir.

Genelleştirilmiş koordinat (q), bir sistemin pozisyonunu belirlemek için gerekli olan birbirinden bağımsız parametrelerdir.

Lagrangian yaklaşımı ile hareket denklemlerinin elde edilebilmesi için sistemin enerji denklemlerinin genelleştirilmiş koordinatlar (q) cinsinden yazılması ve bu denklemlerin q'ya göre türevlerinin hesaplanması gerekir.

m kütleli bir noktasal cismin kinetik enerjisi;



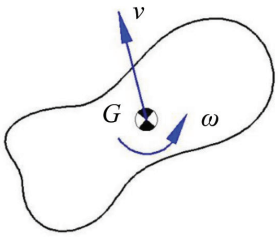
$K = \frac{1}{2}mv^2$ ifadesine eşittir.

Bu cismin konumu x ile ifade edilirse,

$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$ kinetik enerji denklemi

$K = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2$ şeklinde x'e göre de (genelleştirilmiş koordinata) elde edilmiş olur.

Düzlemsel (hem doğrusal hem de dairesel) hareket yapan bir katı cismin kinetik enerji denklemi ise aşağıdaki bağıntı ile ifade edilir.



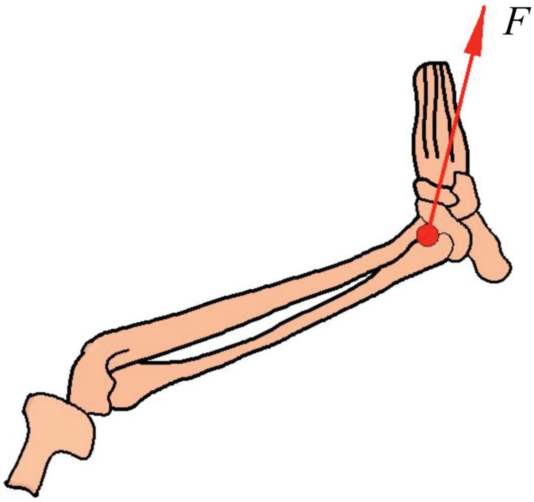
$$K = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$$

G: Ağırlık merkezi

I_G= Ağırlık merkezinin kütle

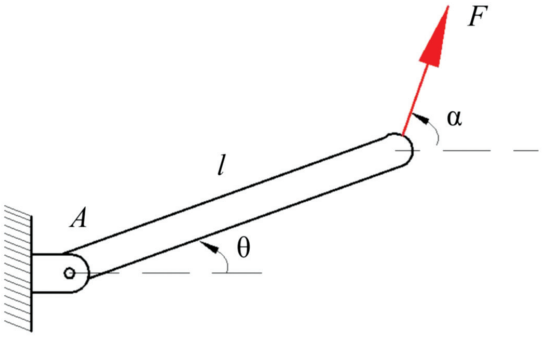
Çeşitli fiziksel sistemlerin Newton-Euler ve Lagranian yöntemleri ile hareket denklemlerinin elde edilmesi üzerine örnekler.

Örnek: Şekildeki *m* kütleli, *l* uzunluğundaki tek serbestlik dereceli tibia ve fibulaya *F* kuvveti etkimektedir. Biyomekanik modelin fiziksel modelini oluşturunuz. Fiziksel sistemin hareket denklemini Newton-Euler ve Lagrangian yaklaşımları ile elde ediniz. Her iki yöntemle elde edilen denklemin aynı olup olmadığını kontrol ediniz.



Çözüm:

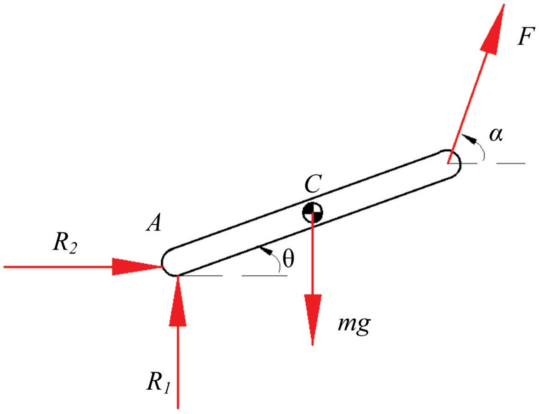
Biyomekanik modelin, fiziksel benzeşimi aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



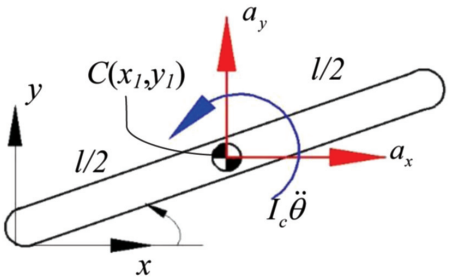
I. Newton-Euler Yöntemi

Sistem tek serbestlik dereceli bir yapı olduğundan dolayı hareket denklemi sayısı da bir olacaktır ve bu denklem genelleştirilmiş koordinata (θ) bağlı olarak elde edilecektir.

Öncelikle aşağıdaki şekilde olduğu gibi fiziksel sistemin serbest cisim diyagramının çizilmesi gerekir. Serbest cisim diyagramında *mg* ve *F* dış kuvvetler, R_1 ve R_2 ise basit mesnette oluşan reaksiyon kuvvetleridir. Cismin ağırlık merkezi *C* noktası kabul edildiğinden cismin ağırlığının (*mg*) bu noktadan etkidiği varsayılacaktır.



Cismin eylemsizlik kuvvet (ma_x, ma_y) ve momentleri ($I_c\ddot{\theta}$) ağırlık merkezine (*C* noktası - centroid) göre belirlenir ve cismin dinamik denge denklemleri bu noktaya göre yazılır.



Cismin ağırlık merkezine göre doğrusal ivmelerin (a_x, a_y) elde edilebilmesi için *C* noktasının konumunun (koordinatlarının) genelleştirilmiş koordinatlar cinsinden belirlenmesi ve konumun zamana göre ikinci mertebeden türevinin alınması gerekir. Buna göre *C* noktasının koordinatları (x_1, y_1)

$$x_1 = \frac{l}{2}\cos\theta$$

$$y_1 = \frac{l}{2}\sin\theta$$

olmak üzere;

$$\sum F_x = m.\alpha_x$$

$\sum \boldsymbol{F}_y = m.\alpha_y$

$\sum \boldsymbol{M}_c = I_C.\ddot{\theta}$ dinamik denge denklemleri yazılır.

$\boldsymbol{a}_x$ ve $\boldsymbol{a}_y$ ivmelerini bulmak için, *C* noktasının *x* ve *y* eksenleri üzerindeki izdüşümün (yani x_1, y_1 uzaklıklarının) 2. mertebeden zamana göre türevinin alınması gerekir. Matematiksel olarak ifade edilmek istenirse;

$a_x = \dfrac{d^2 x_1}{dt^2}$, $a_y = \dfrac{d^2 y_1}{dt^2}$ şeklinde yazılması gerekir.

Buradan,

$$a_x = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)$$

$$a_x = \frac{d}{dt}\left(-\frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta\right) = -\frac{l}{2}(\ddot{\theta}\sin\theta + (\dot{\theta})^2\cos\theta)$$

$$a_y = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy_1}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right) = \frac{l}{2}(\ddot{\theta}\cos\theta - (\dot{\theta})^2\sin\theta)$$ elde edilir.

a_x ve a_y dinamik denge denklemlerinde yerlerine yazılırsa;

$\sum \boldsymbol{F}_x = m.\alpha_x$

$$R_2 + F\cos\alpha = m\{-\frac{l}{2}(\ddot{\theta}\sin\theta + (\dot{\theta})^2\cos\theta)\}$$

$$R_2 = -m\frac{l}{2}\ddot{\theta}\sin\theta - m\frac{l}{2}(\dot{\theta})^2\cos\theta - F\cos\alpha$$

$\sum \boldsymbol{F}_y = m.\alpha_y$

$$R_1 - mg + F\sin\alpha = m\{\frac{l}{2}(\ddot{\theta}\cos\theta - (\dot{\theta})^2\sin\theta)\}$$

$$R_1 = m\frac{l}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - m\frac{l}{2}(\dot{\theta})^2\sin\theta + mg - F\sin\alpha$$ bulunur.

Moment denklemi yazılırsa,

$$\sum \mathbf{M_C} = I_C\,\ddot{\boldsymbol{\theta}}$$

$$-R_1\frac{l}{2}\cos\theta + R_2\frac{l}{2}\sin\theta + F\sin\alpha\frac{l}{2}\cos\theta - F\cos\alpha\frac{l}{2}\sin\theta = \frac{1}{12}ml^2\ddot{\theta}$$

(Not: Kütle atalet momenti I_C'nin $\frac{1}{12}ml^2$ ifadesine eşit olmasına dair detaylı bilgi için Ek I'e bakınız).

Buradan moment denklemi sadeleştirilirse,

$$-R_1\cos\theta + R_2\sin\theta + F\sin\alpha\cos\theta - F\cos\alpha\sin\theta = \frac{l}{6}m\ddot{\theta}$$ elde edilir.

F sinα cosθ - F cosα sinθ = F sin(α - θ) eşitliği dikkate alınırsa moment denklemi,

$-R_1 \cos\theta + R_2 \sin\theta + F\sin(\alpha-\theta) = \frac{l}{6} m\ddot{\theta}$ şeklinde kısalır.

R_1 ve R_2 yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa;

$$-\frac{ml\ddot{\theta}}{2}\cos^2\theta + \frac{ml(\dot{\theta})^2}{2}\sin\theta.\cos\theta - mg\cos\theta + F\sin\alpha.\cos\theta - \frac{ml}{2}\ddot{\theta}\sin^2\theta - m\frac{l}{2}(\dot{\theta})^2\cos\theta.\sin\theta -$$

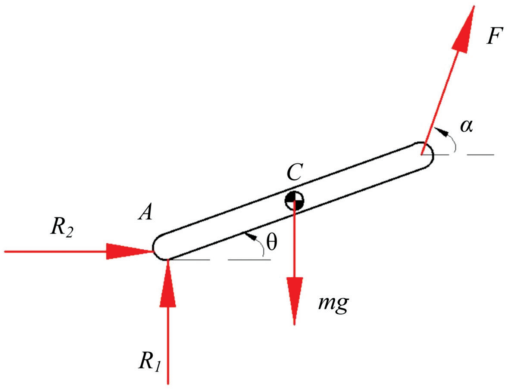
$$F\cos\alpha\sin\theta + F\sin(\alpha-\theta) = \frac{l}{6}m\ddot{\theta}$$

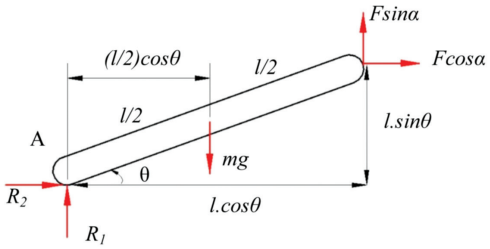
elde edilir.

Yukarıdaki hareket denklemi trigonometrik bağıntılar kullanılarak sadeleştirilirse,

$\frac{1}{3}ml\ddot{\theta} + \frac{mg}{2}\cos\theta = F\sin(\alpha-\theta)$ elde edilir.

Yukarıda elde edilen hareket denklemi, *A* noktasına göre moment alınarak çok daha basit bir hesaplama ile aşağıdaki şekildeki gibi de elde edilebilirdi.





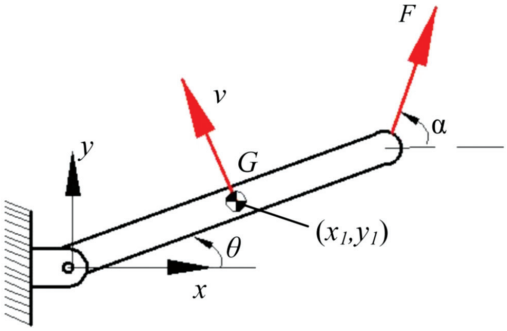
$\sum \mathbf{M_A} = I_A.\ddot{\boldsymbol{\theta}}$; $I_A = \frac{1}{3}ml^2$ (atalet momenti ifadesi için bakınız Ek I).

$$-mg\frac{l}{2}\cos\theta + F\,l\sin\alpha\cos\theta - F\,l\cos\alpha\sin\theta = \frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}$$

Denklem sadeleştirilirse,

$\frac{1}{3}ml\ddot{\theta}+\frac{mg}{2}\cos\theta = F\sin(\alpha-\theta)$ bulunur. Aynı hareket denklemi elde edilir. Ancak bu çözümde eklemde oluşan reaksiyon kuvvetlerinin (R_1, R_2) hesaplaması yapılmamıştır.

II. Lagrangian yöntemi ile çözüm



Şekildeki sistemin genelleştirilmiş koordinatı, $q = \theta'$dır.

Kinetik enerji denklemi fiziksel sistemin ağırlık merkezine (G noktası) göre yazılırsa:

$K=\frac{1}{2}m(v)^2+\frac{1}{2}I_G(\dot{\theta})^2$ elde edilir. Bu denklemin, diğer yazılacak denklemler gibi θ bağlı olarak elde edilmesi gerekir. Bunu gerçekleştirmek için ağırlık merkezinin hızı v, ağırlık merkezinin konumunun (x_1,y_1) zamana göre türevlerinin karelerinin toplamı olarak yazılır.

$$v^2=\dot{x}_1^{\,2}+\dot{y}_1^{\,2}$$

$$x_1=\frac{l}{2}\cos\theta$$

$$y_1=\frac{l}{2}\sin\theta$$

$$\dot{x}_1=\frac{-l\dot{\theta}}{2}\sin\theta$$

$$\dot{y}_1=\frac{l\dot{\theta}}{2}\cos\theta$$

$$v^2=(\frac{-l\dot{\theta}}{2}\sin\theta)^2+(\frac{l\dot{\theta}}{2}\cos\theta)^2=\frac{l^2}{4}(\dot{\theta})^2$$

(Not: $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$)

$$K=\frac{1}{2}m\frac{l^2}{4}(\dot{\theta})^2+\frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2(\dot{\theta})^2 \quad (\text{Not: } I_G=\frac{1}{12}ml^2\ )$$

$K=\frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2$ elde edilir.

$P = mg\frac{l}{2}\sin\theta$ edilir.

(Ağırlık merkezinin potansiyel enerjisi)

D = 0 (Sönüm elemanı sistemde mevcut değil)

(Q_1 genelleştirilmiş koordinatının değişimini sağlayan moment)

Lagrangian denklemi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial P}{\partial q_i} = Q_i$$

i indisi genelleştirilmiş koordinat sayısını (serbestlik derecesini) göstermektedir ve bu soru için bu değer 1'dir.

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left(\frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2\right) = \frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}\right) = \frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0\,,\ \frac{\partial K}{\partial \theta} = 0\,,\ \frac{\partial P}{\partial \theta} = mg\frac{l}{2}\cos\theta$$

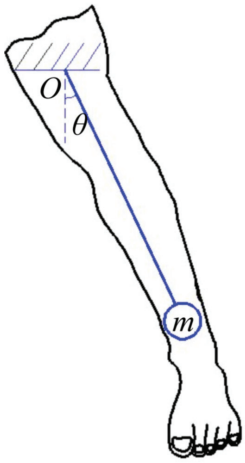
$Q_1 = F\,l \sin\alpha$ ise elde edilen tüm sonuçları Lagrangian denkleminde yerine yazarsak,

$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} + mg\frac{l}{2}\cos\theta = F.l.\sin\alpha$ bulunur.

Denklem sadddeleştirilirse;

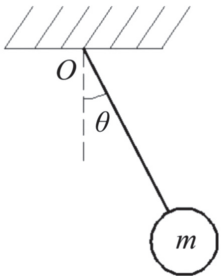
$\frac{1}{3}ml\ddot{\theta} + \frac{mg}{2}\cos\theta = F\sin\alpha$ bulunur. Newton-Euler yöntemi ile bulunan sonucun aynısı elde edilmiştir.

Örnek: Şekildeki insan bacağının, diz ekleminden geçen anterioposterior ekseni etrafındaki salınımı için hareket denklemini hem Newton-Euler hem de Lagrangian yöntemleri ile elde ediniz.



Çözüm: İnsan bacağının salınım hareketi *O* noktası etrafında salınım yapan *m* kütleli, 1 serbestlik dereceli küresel cismin hareketine benzetilerek çözüm aranmıştır.

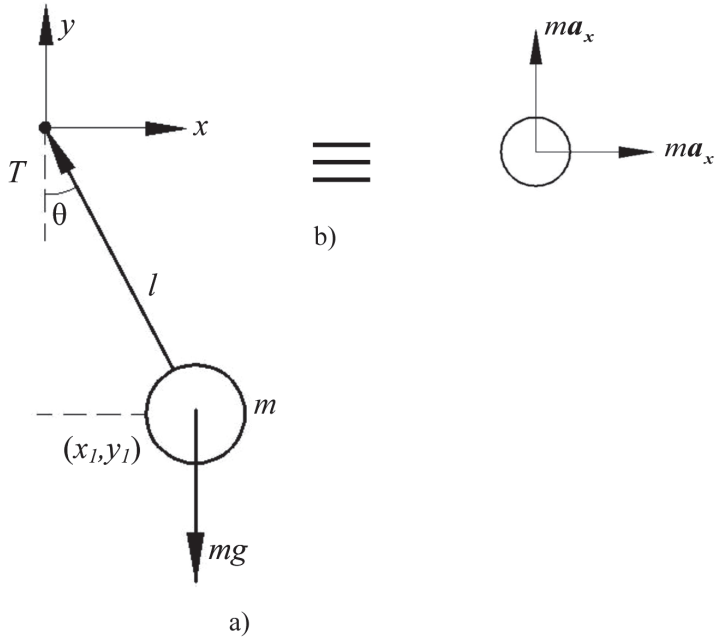
Biyomekanik modelin fiziksel karşılığı aşağıdaki şekilde verilmiştir.



I. Newton-Euler Yöntemi

Öncelikle fiziksel sistemin serbest cisim diyagramı çizilmeli (Şekil 12a) ve cisim üzerindeki eylemsizlik kuvvetleri gösterilmelidir (Şekil 12b).

Serbest cisim diyagramındaki T, ipteki gerilme kuvvetidir. Eğer O noktasına xy koordinat ekseni yerleştirilirse, (x_1,y_1) noktası, ağırlık merkezinin koordinatları olacaktır.



Şekil 12. Fiziksel sistemin a) serbest cisim diyagramı b) eylemsizlik kuvvetleri.

$x_1 = l \sin \theta$

$y_1 = -l \cos \theta$

Fiziksel sistem, noktasal bir cisim olarak kabul edilecektir. Bu kabul altında cismin dinamik denge denklemleri aşağıdaki bağıntılarla ifade edilebilir.

$$\sum \boldsymbol{F}_x = m.\boldsymbol{a}_x$$

$$\sum \boldsymbol{F}_y = m.\boldsymbol{a}_y$$

$$a_x = \frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\frac{dx_1}{dt}) = \frac{d}{dt}(l\dot{\theta}\cos\theta)$$

$$a_x = l(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)$$

$$a_y = \frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\frac{dy_1}{dt}) = \frac{d}{dt}(l\dot{\theta}\sin\theta)$$

$a_y = l(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)$

$\sum \boldsymbol{F}_x = m.\boldsymbol{a}_x$ ise

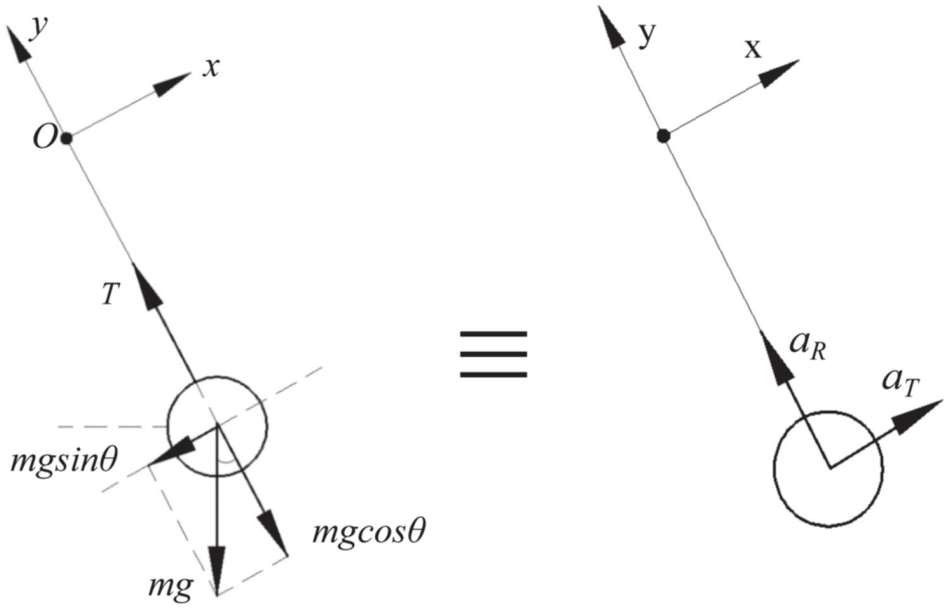
$-T.\sin\theta = ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta$ (1)

$\sum \boldsymbol{F}_y = m.\boldsymbol{a}_y$ ise

$T.\cos\theta - mg = ml\ddot{\theta}\sin\theta + ml\dot{\theta}^2\cos\theta$ (2)

(1) denklemindeki T'yi çekip, (2)'de yerine yazarsak,
$l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$ elde edilir.

Aynı soru, xyz koordinat ekseninin z etrafında θ kadar döndürülmesi ve buna bağlı olarak radyal ve çizgisel ivmelerin belirlenmesi ile daha kolay çözülebilirdi.



$a_T = l\ddot{\theta}$ ve $a_R = l\dot{\theta}^2$ olmak üzere;

$\sum \boldsymbol{F}_x = m\boldsymbol{a}_T$; $-mg\sin\theta = ml\ddot{\theta}$

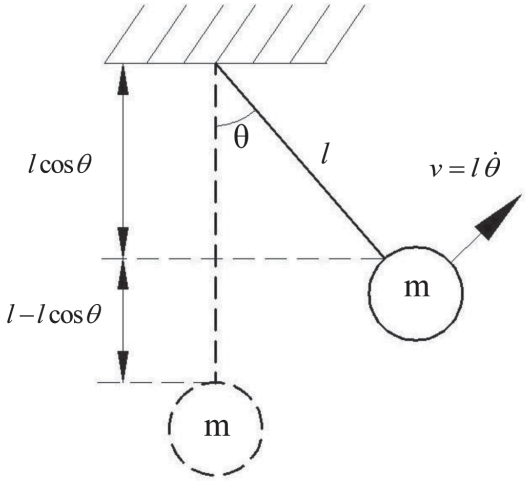
$l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$

Eğer ip gerilmesi T de bulunmak istenirse;

$\sum \boldsymbol{F}_y = m\boldsymbol{a}_R$; $T - mg\cos\theta = ml\dot{\theta}^2$

$T = ml\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$ şeklinde hesaplanır.

Lagrangian Yöntemi



Genelleştirilmiş koordinat: $q=\theta$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2$$

$$P = mg(l - l\cos\theta)$$

$$D = 0$$

Lagrangian genel denklemi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial P}{\partial q_i} = Q_i$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} = m\,l^2\dot{\theta} \text{ ise } \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) = ml^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_i} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial q} = \frac{\partial P}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta$$

$Q_1 = 0$ (Dış kuvvet mevcut değil)

Hareket denklemi;

$ml^2\ddot{\theta} - mgl\sin\theta = 0 \Rightarrow l\ddot{\theta} - g\sin\theta = 0$ bulunur.

Örnek: Tüm vücut titreşimi (TVT, whole body vibration), düşük frekanslı çevresel titreşimlerin temas noktalarından insan vücuduna iletilmesi ve etki etmesidir (5,6). TVT'ye uzun süre maruz kalmak solunum, kalp-damar, görme ve denge fonksiyonların olumsuz etkilenmesine ve eklem rahatsızlıkları gibi sorunlara yol açmaktadır. TVT'nin insan vücudundaki etkilerini değerlendirmek ve simüle etmek için literatürde, birçok biyodinamik insan vücudu modeli önerilmiştir. Bunlardan bir tanesi şekilde görülen 4 serbestlik dereceli modeldir (5).

Modeldeki z_0, insan vücuduna koltuktan gelen bozucu etkinin sebep olduğu yer değiştirmeyi ifade eder. İnsan vüducunun biyodinamik açıdan ayrıştırılan parçalarının yer değiştirmesi, kütleleri, yay elemanlarının rijitlik katsayıları ve sönüm elemanların katsayıları sırasıyla z_i, m_i, k_i ve c_i ile gösterilmiştir.

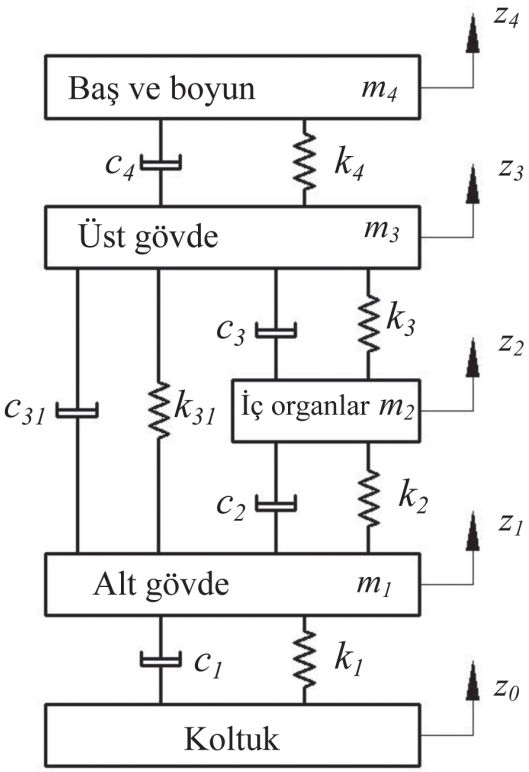
Modelin hareket denklemi Newton-Euler ve Lagrangian yöntemleriyle elde ediniz.

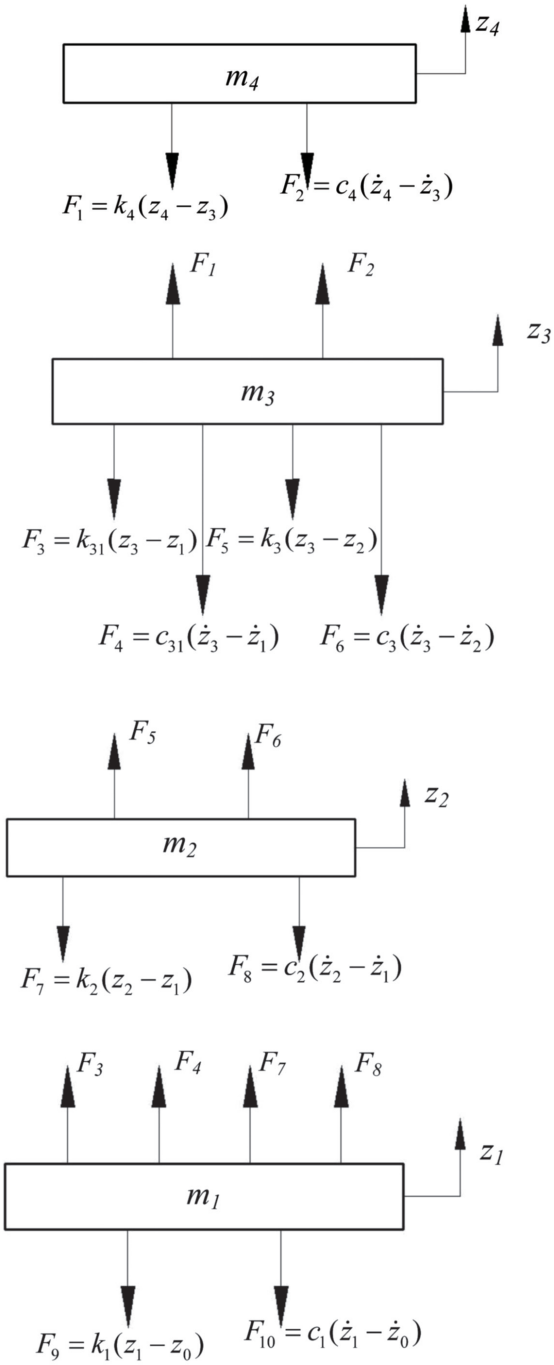
Çözüm:

Newton-Euler Yaklaşımı

Sistem 4 serbestlik dereceli olduğundan 4 tane hareket denklemi elde edilecektir.

Bütün parçaların serbest cisim diyagramlarını çizmek için, öncelikle tüm yay elemanlarının başlangıçta gergin oldukları varsayılır. Dolayısıyla, doğrudan tüm yayların ve sönümleme elemanlarının kütleleri çektiği ve her parçanın önceki durumundan daha fazla yer değiştirdiği kabul edilmiş olur. Bu kabul sonrası her bir vücut parçasının serbest cisim diyagramları aşağıdaki gibi çizilebilir.




z_4
m_4
$F_1 = k_4(z_4 - z_3)$
$F_2 = c_4(\dot{z}_4 - \dot{z}_3)$
F_1
F_2
z_3
m_3
$F_3 = k_{31}(z_3 - z_1)$
$F_5 = k_3(z_3 - z_2)$
$F_4 = c_{31}(\dot{z}_3 - \dot{z}_1)$
$F_6 = c_3(\dot{z}_3 - \dot{z}_2)$
F_5
F_6
z_2
m_2
$F_7 = k_2(z_2 - z_1)$
$F_8 = c_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1)$
F_3
F_4
F_7
F_8
z_1
m_1
$F_9 = k_1(z_1 - z_0)$
$F_{10} = c_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_0)$

Tüm cisimlere dinamik denge kuralı uygulanırsa
4. cisim (baş & boyun) için hareket denklemi:

$$-F_1 - F_2 = m_4\,\ddot{z}_4$$

$$m_4\,\ddot{z}_4 + k_4(z_4 - z_3) + c_4(\dot{z}_4 - \dot{z}_3) = 0$$

3. cisim (üst gövde) için hareket denklemi:

$$F_1 + F_2 - F_3 - F_4 - F_5 - F_6 = m_3\,\ddot{z}_3$$

$$m_3\,\ddot{z}_3 + k_4(z_3 - z_4) + c_4(\dot{z}_3 - \dot{z}_4) + k_{31}(z_3 - z_1) + c_{31}(\dot{z}_3 - \dot{z}_1) + k_3(z_3 - z_2) + c_3(\dot{z}_3 - \dot{z}_2) = 0$$

2. cisim (iç organlar) için hareket denklemi:

$$F_5 + F_6 - F_7 - F_8 = m_2\,\ddot{z}_2$$

$$m_2\,\ddot{z}_2 + k_3(z_2 - z_3) + c_3(\dot{z}_2 - \dot{z}_3) + k_2(z_2 - z_1) + c_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) = 0$$

1. cisim (alt gövde) için hareket denklemi

$$F_3 + F_4 + F_7 + F_8 - F_9 - F_{10} = m_1\,\ddot{z}_1$$

$$m_1\ddot{z}_1 + k_{31}(z_1 - z_3) + c_{31}(\dot{z}_1 - \dot{z}_3) + k_2(z_1 - z_2) + c_2(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + k_1(z_1 - z_0) + c_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_0) = 0$$

bağıntıları ile elde edilir.

Not: Sistemin yer çekimi etkisini içermediğine dikkat edilmelidir. Bunun sebebi başlangıçta yapılan, mekanik elemanların (yay ve sönümleme elemanları) gergin konumda bulunduğu varsayımıdır.

Lagrangian Yaklaşımı

$$K = \frac{1}{2}m_1\,\dot{z}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\,\dot{z}_2^{\,2} + \frac{1}{2}m_3\,\dot{z}_3^{\,2} + \frac{1}{2}m_4\,\dot{z}_4^{\,2}$$

$$P = \frac{1}{2}k_1(z_1 - z_0)^2 + \frac{1}{2}k_2(z_1 - z_2)^2 + \frac{1}{2}k_{31}(z_1 - z_3)^2 + \frac{1}{2}k_3(z_2 - z_3)^2 + \frac{1}{2}k_4(z_3 - z_4)^2$$

$$D = \frac{1}{2}c_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_0)^2 + \frac{1}{2}c_2(\dot{z}_1 - \dot{z}_2)^2 + \frac{1}{2}c_{31}(\dot{z}_1 - \dot{z}_3)^2 + \frac{1}{2}c_3(\dot{z}_2 - \dot{z}_3)^2 + \frac{1}{2}c_4(\dot{z}_3 - \dot{z}_4)^2$$

Yukarıdaki kinetik enerji (K), potansiyel enerji (P) ve sönüm terimi (D) denklemleri Lagranian denkleminde yerine yazılır ve elde edilen Lagranian denkleminin sırasıyla aşağıda belirtilen genelleştirilmiş koordinatlara (q_i) göre türevleri hesaplanırsa hareket denklemleri elde edilmiş olur. Fiziksel sisteme bir dış kuvvet etkimediğinden dolayı genelleştirilmiş kuvvet Q_i bütün denklemlerde sıfıra eşittir.

Birinci hareket denklemi ($q_1 = z_1$)

$$m_1\ddot{z}_1 + c_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_0) + c_2(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + c_{31}(\dot{z}_1 - \dot{z}_3) + k_1(z_1 - z_0) + k_2(z_1 - z_2) + k_{31}(z_1 - z_3) = 0$$

İkinci hareket denklemi ($q_2 = z_2$)

$$m_2\ddot{z}_2 + c_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + c_3(\dot{z}_2 - \dot{z}_3) + k_2(z_2 - z_1) + k_3(z_2 - z_3) = 0$$

Üçüncü hareket denklemi ($q_3 = z_3$)

$$m_3\ddot{z}_3 + c_3(\dot{z}_3 - \dot{z}_2) + c_{31}(\dot{z}_3 - \dot{z}_1) + c_4(\dot{z}_3 - \dot{z}_4) + k_3(z_3 - z_2) + k_{31}(z_3 - z_1) + k_4(z_3 - z_4) = 0$$

Dördüncü hareket denklemi ($q_4 = z_4$)

$$m_4\ddot{z}_4 + c_4(\dot{z}_4 - \dot{z}_3) + k_4(z_4 - z_3) = 0$$

Momentum ve İmpuls

Doğrusal momentum, bir doğru boyunca hareket eden bir cismin hareket miktarının bir ölçüsüdür ve

$p = mv$

denklemi ile hesaplanır. Denklemde m kütle, v ise cismin hızıdır.

Kapalı bir sistemde (yani çevresiyle kütle geçişi olmayan ve dış kuvvet etkimeyen fiziksel sistem) momentum değişmez. Buna momentumun korunumu denir.

Newton'un ikinci hareket kanunu;

$\mathbf{F} = m\alpha$ bağıntısı ile ifade edilmişti. İvme $\boldsymbol{a}$ yerine $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ yazılırsa;

$$\mathbf{F} = m\,\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$\mathbf{F}\,\Delta t = m\Delta v$ elde edilir. Eşitliğin sol tarafında kalan $\mathbf{F}\,\Delta t$ büyüklüğü impuls (etki) olarak tanımlanır.

Momentumun değişimi

$F\,t = (mv_2)\text{-}(mv_1)$ bağıntısı ile tanımlanabilir. v_2 ve v_1 sırasıyla son hız ve ilk hızı ifade eder.

Açısal bir hareket söz konusu olduğunda açısal momentum meydana gelir ve

$H = I\,\omega$ ifadesiyle tanımlanır.

Denklemde I kütle atalet momenti, ω ise açısal hızdır.

Açısal impulsun bağıntısı ise

$\Delta H = \tau\,\Delta t$ şeklindedir (τ: tork). Momentum değişimi olarak yazılmak istenirse açısal momentum;

$\tau\,\Delta t = (I\omega_2) - (I\omega_1)$ biçiminde tanımlanır. ω_2 ve ω_1 sırasıyla son ve ilk açısal hızları ifade eder.

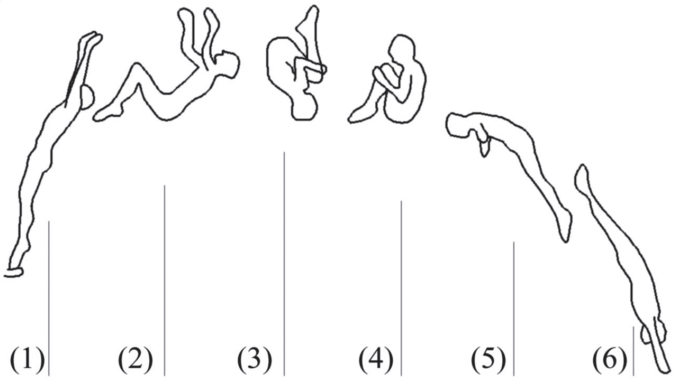
Özellikle kuvvetin çok kısa bir zaman aralığı içerisinde etkidiği durumlar için impuls-momentum bağıntıları, fiziksel sistemlerin hareket denklemlerine ulaşmak için uygun bir yoldur.

Örnek:

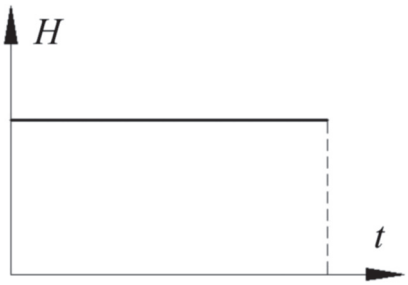
Şekilde bir sporcunun tramplenden suya atlarken yaptığı rotasyonel hareket aşama aşama görülmektedir.

Buna göre;

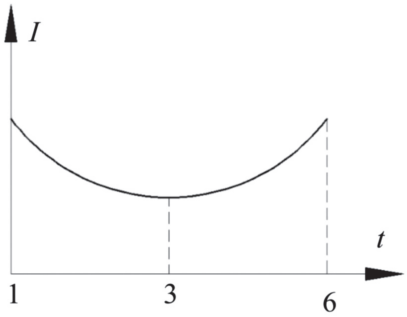
a. Sporcunun açısal momentumu zamanla nasıl değişir?
b. Sporcunun kütle atalet momenti zamanla nasıl değişir?
c. Sporcunun açısal hızı zamanla nasıl değişir?



Çözüm:

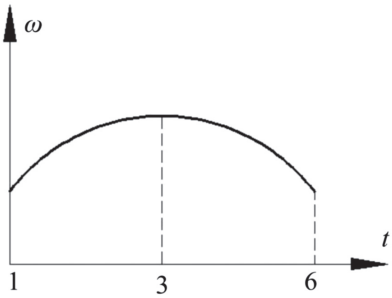


a. Momentumum korunumu kanunu, bir cisim üzerine dışarıdan bir kuvvet etkimediği sürece açısal momentumunda H değişiklik olmayacağını belirtmektedir. Bu prensipten hareketle, hava sürtünmesinin sporcu üzerindeki etkisinin ihmal edilebileceği varsayımıyla, sporcunun açısal momentumunun hareket boyunca sabit kalacağı çıkarımında bulunulabilir.
$H_{ilk} = H_{son}$



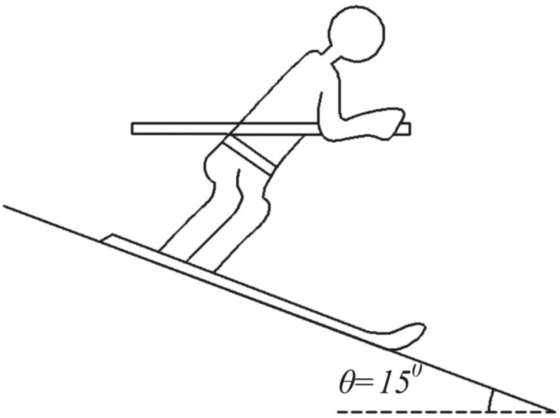
b. Cisimlerin kütle dağılımları dönme merkezinden uzaklaştıkça atalet momentleri artar. Bu yüzden sporcunun (1) ve (6) noktalarında atalet momenti en büyük iken tepe noktasında (3) ise en küçük değeri alır.

c. Açısal momentum, atalet momenti ile açısal hızın çarpımı ile hesaplanır.
$H = I\,\omega$



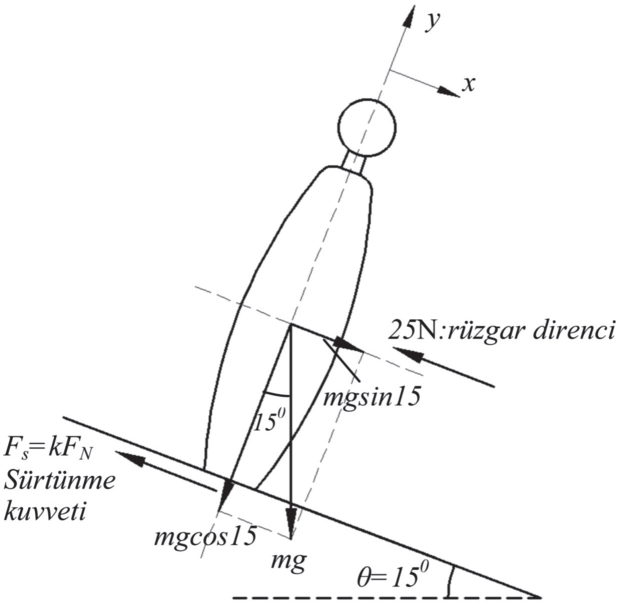
Açısal momentumun hareket boyunca korunacağı kabulü doğrultusunda atalet momenti ile açısal hız arasında ters orantılı bir ilişki olduğu görülmektedir. Dolayısıyla atalet momentinin büyük olduğu durumda açısal hızın küçük, momentin küçük olduğu durumda ise hızın büyük olacağı öngörülebilir.

Örnek Soru:



m = 80 kg'lık bir kayakçı, 15^0 lik eğimli bir parkurda iniş yapmaktadır. Kayakçıya etki eden rüzgar direnci 25 N'dir. Kayak ve kar arasındaki sürtünme katsayısı k=0,08'dir. Kayakçı üzerine hareket doğrultusu boyunca etki eden net kuvveti hesaplayınız.

Çözüm:



$$\Sigma \mathbf{F_x} = ?$$

$$\Sigma \mathbf{F_x} = (mg\sin 15 - 25 - k\,F_N)\mathbf{i}$$

Normal Kuvvet : $F_N = mg\cos 15 = 80(9,81)\cos 15 = 758\,\mathrm{N}$

$$\Sigma \mathbf{F_x} = [80(9,81)\sin 15 - 25 - (0,08)\,758]\mathbf{i} = 117,5\mathbf{i}$$

$$F = 117,5\,\mathrm{N}$$

Örnek: Bir buz hokeyi mücadelesinde iki sporcu aynı doğrultu üzerinde karşılık olarak birbirlerine doğru ilerlerken çarpışmışlardır. 65 kg kütleli sporcunun çarpışma öncesi hızı 4 m/s, 80 kg kütleli sporcunun çarpışma öncesi hızı ise 5 m/s'dir. Çarpışma sonrasında sporcular birbirlerine kenetlenmiş vaziyette bir süre hareket etmişlerdir. Bu esnadaki hızını hesaplayınız.

Çözüm: Momentumun konumu prensibine göre

$$P_{çarpışma\ öncesi} = P_{çarpışma\ sonrası}$$

$$m_1\mathbf{v_1} + m_2\mathbf{v_2} = (m_1 + m_2)\mathbf{v_{son}}$$

$$65 \times 4 - 80 \times 5 = 145 \times \mathbf{v_{son}}$$

$$v_{son} = -0,99\,\text{m/s}$$

Sonuçtaki (-) işareti, çarpışma sonrasında her iki sporcunun da 80 kg'lik sporcunun başlangıçtaki yönü doğrultusunda bir hıza sahip olduğunu göstermektedir.

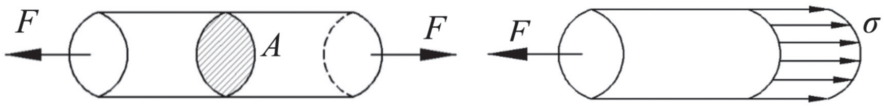
4. Biyolojik Yapıların Mekanik Özellikleri: Mukavemet Açısından Değerlendirilmeleri

Mukavemet şekil değiştirebilen (rijit olmayan) cisimler mekaniğidir. Cisimlerin dış etkiler ve bu dış etkilerin neden olduğu iç kuvvetler karşısında gösterecekleri davranışı karakterize eden bilim dalıdır (7). Cisimlerin yük altındaki şekil değişimleri ve mekanik özelliklerinin yük altındaki davranışına etkisi mukavemetin ilgi alanıdır (8). Kas, tendon, kemik, kıkırdak ve ligament (bağ doku) gibi dokuların kuvvet ya da moment etkisi altındaki davranışlarının incelenebilmesi için mukavemet disiplinin temel kavramlarından yararlanılır.

Temel Kavramlar

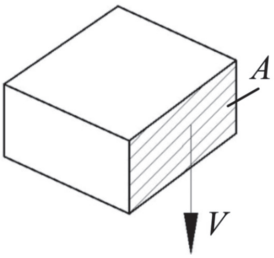
Gerilme: Bir cismin birim alanına etkiyen kuvvete gerilme denir. Gerilme bir cismin malzeme özelliklerine bağlı olarak üzerine gelen kuvveti taşıyıp taşıyamayacağını, bu kuvvet sonrasında ne tür bir fiziksel değişime maruz kalacağını gösteren önemli bir parametredir. Normal gerilme (σ) ve kayma gerilmesi (τ) olmak üzere iki tür gerilme vardır.

Normal Gerilme: Cismin kesit alanına dik biçimde etkiyen kuvvetin alana oranıdır. σ ile gösterilir ve birimi Pascal (Pa=N/m^2)'dır.



Normal gerilme $\sigma = \frac{F}{A}$ (Pa=N/m^2) bağıntısı ile ifade edilir. Hesaplanan bu gerilme değeri incelenen kesit yüzeyindeki gerilmelerin ortalama değeridir. Gerçek durumda bir yüzeyin tamamında oluşan gerilme değerleri birbirlerine eşit değildir. Ancak hesaplama kolaylığı açısından bu bölümde normal gerilme değerlerinin yüzey boyunca aynı büyüklülükte dağılım gösterdiği varsayılacaktır.

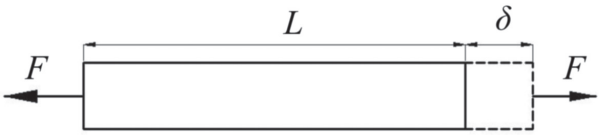
Kayma Gerilmesi: Cismin kesit alanına paralel etkiyen kesme kuvvetlerinin etkisiyle ortaya çıkar. Kesme kuvvetinin alana oranıdır. *V* kesme kuvvetini ve *A* da alanı göstermek üzere; kayma gerilmesi aşağıdaki bağıntı ile hesaplanır, τ ile gösterilir ve birimi Pascal (Pa)'dır.



$$\tau = \frac{F}{A} \quad (\text{Pa=N/m}^2)$$

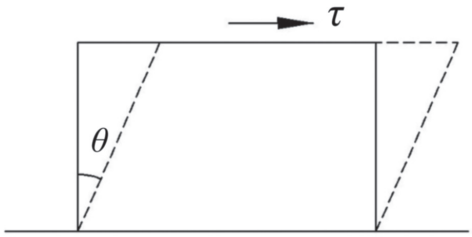
Genleme: Bir cismin yük altında gösterdiği şekil değişimidir. Normal genleme (ε) ve kayma genlemesi (γ) olmak üzere iki tip genleme mevcuttur.

Normal Genleme: Cisimlerin eksenel yükleme sonucundaki boyca değişiminin (uzama ya da kısalma) ilk boyuna oranıdır ve ε ile gösterilir. Birimsiz bir büyüklüktür.



$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \quad (\text{mm/mm})$$

Kayma Genlemesi (Shear): Kayma gerilmesi etkisiyle cisimde ortaya çıkan açısal deformasyon olarak tanımlanabilir. Birimi radyandır ve γ ile gösterilir. *G* kayma modülü olmak üzere aşağıdaki bağıntı ile tanımlanabilir.

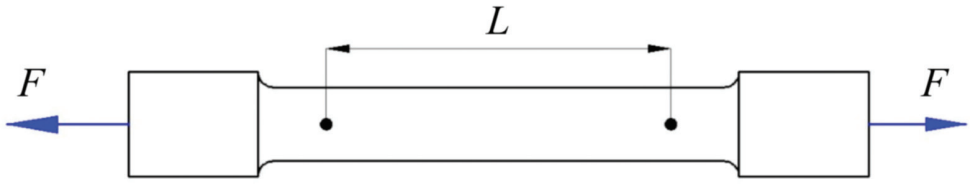


$$\gamma = \frac{r}{G} \quad (\text{rad})$$

Malzemelerin mekanik özelliklerini, maksimum dayanımlarını ya da maksimum uzamalarını belirlemek için yapılan bir takım testler mevcuttur. Test cihazlarının incelenmek istenen malzemenin numunesine uyguladıkları kuvvet ve malzemenin bu etki sonucundaki deformasyon verileri kaydedilerek malzemenin mekanik davranışları karakterize edilebilir. Biyomekanik çalışmalarda ise incelenen malzeme organik bir numune (ör. kas, kemik, tendon) ya da vücuda yerleştirilen bir implant (ör. kalça, diz, diş protez ya da implantı) olabilir. Biyomekanik çalışmalarda sıklıkla uygulanan testler *i)* çekme testi, *ii)* basma testi ve *iii)* üç noktadan eğme testleridir.

Çekme Testi

Malzemelerin gerilme-genleme ilişkisini ortaya çıkarmak ve elastik modül, akma mukavemeti, çekme mukavemeti gibi özelliklerini belirleme için yapılan testtir. L uzunluğuna sahip numunelere çekme deney makinesinde, kopuncaya kadar eksenleri boyunca çekme kuvveti uygulanır. Numunenin baş kısımları (Şekil 13) kuvvet uygulamak için test cihazının çeneleri tarafından tutulan kısımlardır. Numunenin baş kısmı, tutmadan dolayı olabilecek deformasyonlar neticesiyle bu bölgede kırılma yaşanmaması için, ortadaki bölgeye göre daha büyüktür. Numunenin orta bölgesi, deformasyonun ve kopmanın oluşmasının istendiği bölgedir.



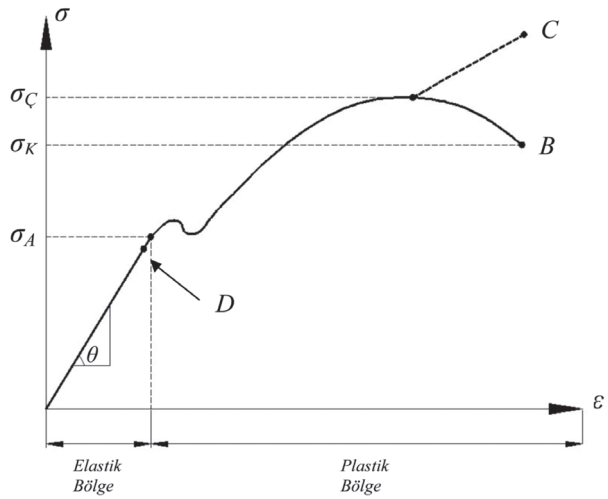
Şekil 13. Klasik mekanik uygulamalarda test cihazına bağlanan numunenin geometrisi.

Test sonucunda elde edilen grafik malzemenin yük altındaki davranışını ve mekanik özelliklerini ortaya koyar. Örneğin; tipik bir yapı çeliğinin gerilme-genleme (gerilme-şekil değiştirme) grafiği çekme testi sonucunda aşağıdaki gibi elde edilir (Şekil 14).

Test boyunca elde edilen uzama değerleri okunur. Bu değerler,

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad \text{ve} \quad \varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

bağıntılarında kullanılarak gerilme ve genleme hesaplanır. Burada A; numunenin orta bölgesinin kesit alanını, δ boyuna uzamayı gösterir. Grafikte B noktası nominal



Şekil 14. Bir yapı çeliğine ait gerilme-genleme grafiği.

kopma mukavemetini, *C* noktası gerçek kopma mukavemetini, *D* noktası ise elastik limiti ifade eder. σ_A akma, $\sigma_Ç$ ise maksimum mukavemet değerleridir. Gerilme-genleme grafiği (çekme diyagramı) ile ilgili bazı önemli özellikler aşağıda verilmiştir.

Elastisite Modül (Young Modülü) ve Hooke Kanunu

Gerilme-genleme grafiğinin elastik bölgesi, malzemeye uygulanan yük kaldırıldıktan sonra malzemenin başlangıçtaki boyutlarına geri dönebileceği bölgesi tanımlar. Elastik bölgede gerilmenin genlemeye oranı sabittir. Bu oran aynı zamanda elastik eğrinin eğimidir. Buna eğime elastisite modülü (Elastik modül ya da Young modülü) denir ve *E* ile gösterilir (8).

$$E = \tan\theta = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Gerilme ile genleme arasındaki $\sigma = E\varepsilon$ ilişkisi elastik bölge boyunca geçerlidir ve Hooke kanunu olarak adlandırılır.

Elastisite modülü her malzeme için farklıdır ve dolayısıyla ayırt edici bir özelliktir. Mekanik özellikleri belirleyen en önemli parametrelerden biri olan elastisite modülü çelik için 200GPa, cam için 50-90GPa iken, kemik için 10-15GPa aralığındadır.

Akma Mukavemeti

Malzemenin elastik bölgeden çıkıp akmaya başladığı gerilme değeridir (σ_A). Plastik yani kalıcı şekil değişimi bölgesine geçişte önemli bir ara değerdir.

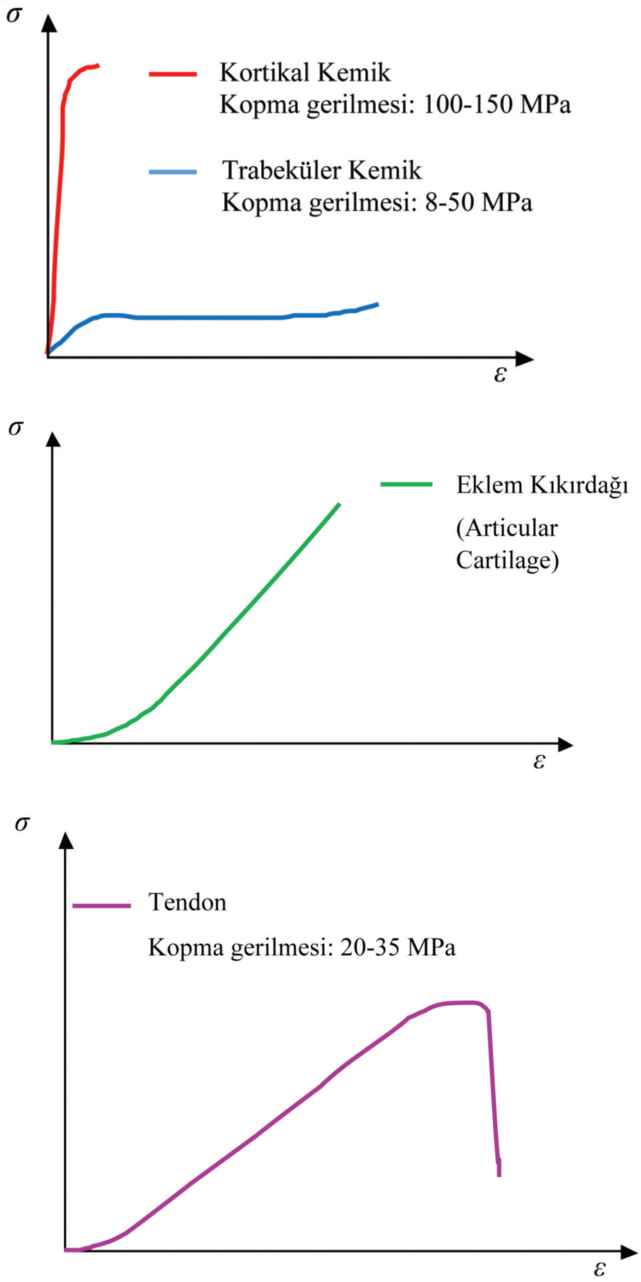
Çekme Mukavemeti

Malzemenin kopmasına veya kırılmasına kadar görülen en büyük gerilme değeridir, $\sigma_Ç$ ile gösterilir.

Kopma Mukavemeti

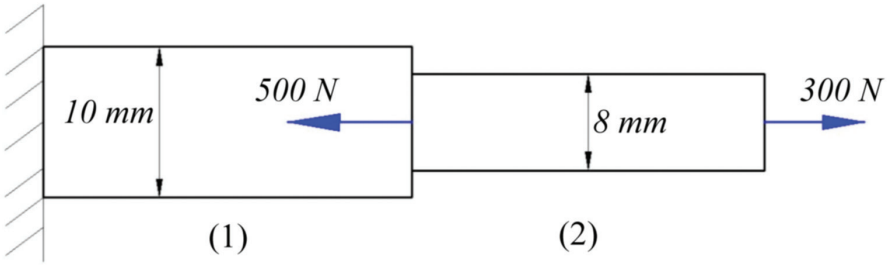
Gerilme-genleme grafiğinde malzemenin koptuğu gerilme değerine kopma mukavemeti σ_K olarak adlandırılır. Nominal kopma mukavemeti teorik olarak hesaplanan gerilme değerini, gerçek kopma mukavemeti de kuvvetin anlık alana oranı ile gösterilen gerilme değerini ifade eder.

Sünek malzemeler (ör. metaller, polimelerler) belli bir akma ve plastik deformasyon gösterdikten sonra koparken, gevrek malzemelerde (ör. seramikler ve camlar) çok az miktarda akmadan sonra kırılma ya da kopma hızlı bir biçimde gerçekleşir. Gevrek mühendislik malzemeleri elastik modüllerine bağlı olarak farklı gerilme değerlerinde koparlar. Bunlar için önemli bir detay da belirgin bir akma göstermeden kopmuş olmalarıdır. Şekil 15'te çeşitli malzemelerin gerilme-genleme karakteristikleri verilmiştir.

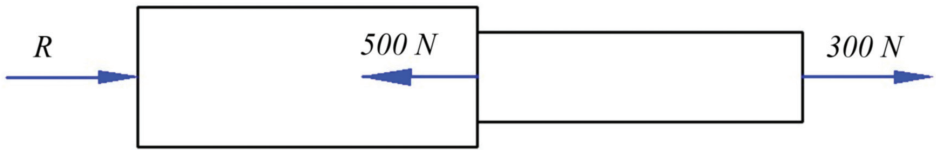


Şekil 15. Bir yapı çeliğine ait gerilme-genleme grafiği.

Örnek: Şekildeki sistemde, çeşitli yüklemelere maruz kalan birbirine bağlı (1) ve (2) silindirlerinde meydana gelen gerilmeleri hesaplayınız.



Çözüm: Öncelikle sistemin statik olarak dengede olması için gerekli reaksiyon kuvveti hesaplanmalıdır.

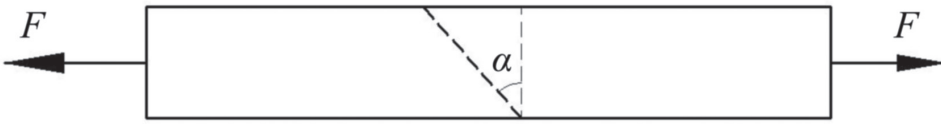


$\sum F_x = 0;\ R + 300 - 500 = 0$
$R = 200\ N$

(1) ve (2) silindirleri için serbest cisim diyagramı ayrı ayrı çizilirerek bunlara etkiyen net kuvvet hesaplanabilir.

Birinci silindirin kesit alanı: $A_1=\pi r^2= \pi 5^2=78{,}5\ mm^2$
İkinci silindirin kesit alanı: $A_2=\pi r^2= \pi 4^2=50{,}3\ mm^2$
Birinci silindire etkiyen gerilme: $\sigma_1= F_1 / A_1=200/78{,}5=2{,}55$ MPa (Basma Gerilmesi)
İkinci silindire etkiyen gerilme: $\sigma_2= F_2 / A_2=300/50{,}3=5{,}96$ MPa (Çekme Gerilmesi).

Örnek: Şekildeki çapı 20 mm olan silindirik çubuğa F=800'luk bir kuvvet uygulanıyor.



$\alpha = 30^0$ değeri için şekilde gösterilen eğik düzlemde meydana gelen gerilmeleri gösteriniz ve büyüklüklerini hesaplayınız.

Çözüm:

Kuvvetin yüzeye dik olan bileşeni normal gerilme, paralel olan bileşeni ise kayma gerilmesine sebep olur.

$F_1 = F \cos\alpha$

$F_2 = F \sin\alpha$

Gerilmeler hesaplanırken alanın da eğimden dolayı değiştiğine dikkat edilmelidir.

$A = \pi r^2 = \pi 10^2 = 314$ mm^2 (silindirin kuvvet eksenine dik kesitinin alanı)

$A_1 \cos\alpha = A$ ise $A_1 = A/\cos\alpha = 314/\cos 30 = 363$ mm^2 (eğik yüzeyin alanı)

Normal gerilme;

$$\sigma = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F.\cos\alpha}{363} = \frac{800.\cos 30}{363}$$

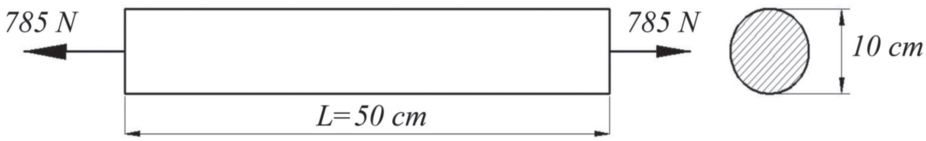
$\sigma = 1{,}91$ MPa

Kayma gerilmesi;

$$\tau = \frac{F_2}{A_1} = \frac{F.\sin\alpha}{363} = \frac{800.\sin 30}{363}$$

$\tau = 1{,}1$ MPa bulunur.

Örnek: Şekilde görülen silindirik çubuğa 785N değerinde çekme kuvveti uygulanıyor. Çubuğun boyunda oluşacak uzamayı hesaplayınız. Çubuk malzemesi çelik olup elastik modülü E=200 GPa'dır.



Çözüm: Gerilme tanımı ve Hooke kanunu kullanılarak çözüm yapılır.

$\sigma = \dfrac{F}{A}$ ve $\sigma = E.\varepsilon$ olmak üzere, $\dfrac{F}{A} = E.\varepsilon$ eşitliği kurulursa,

Genleme değeri; $\varepsilon = \dfrac{F}{A.E}$ bağıntısı ile bulunur.

$F = 785$ N

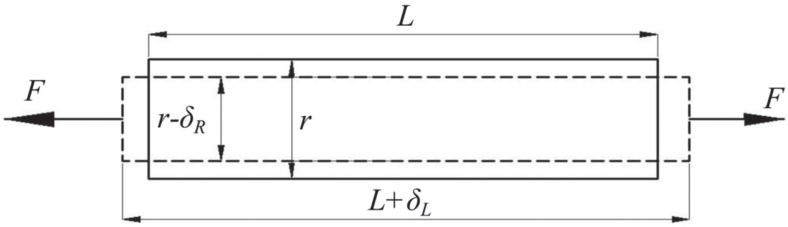
$A = \pi(0{,}05)^2 = 7{,}85 \times 10^{-3}$ m^2

$E = 200 \times 10^9$ N/ m^2

$\varepsilon = 0.5x10^{-6}$ m

$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{\delta}{0.5} \Rightarrow \delta = 0,25 \times 10^{-6}$ m büyüklüğünde uzama değeri bulunmuş olur.

Poisson Oranı: Ekseni boyunca *F* kuvveti ile çekilen bir çubukta meydana gelen boyuna uzamanın (δ_L), çaptaki daralmaya (δ_R) oranı olarak tanımlanır.



Boyuna ve enlemesine genleme sırasıyla;

$\varepsilon_L = \frac{\delta_L}{L}$ ve $\varepsilon_r = \frac{-\delta_r}{r}$ olmak üzere,

Poisson oranı; $\nu = -\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_L}$ bağıntısı ile ifade edilir.

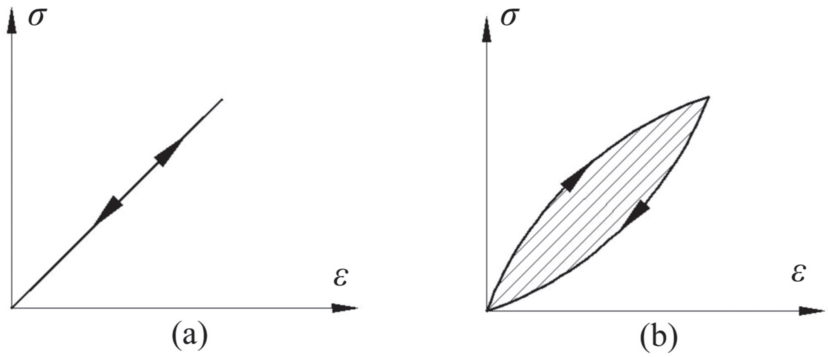
İzotropi: Malzeme özelliklerinin bütün doğrultularda aynı olması durumudur. İzotropik malzemelerde elastik özellikler doğrultu ve yönlerden bağımsızdır (ör. cam, seramik, metal). Anizotropi ise maddenin özelliklerinin doğrultuya göre farklılık göstermesidir (ör. ahşap, kas, kemik).

Homojenlik: Bir cismin hacmi içindeki her noktada aynı yoğunluğa sahip olmasıdır. Yani yoğunluğun bütün noktalarda herhangi bir düzensizlik olmadan sabit olması durumudur.

Mühendislik malzemeleri (çelik, alüminyum vb.) genellikle lineer, elastik, homojen ve izotropik özellikler gösterirken, aksine biyolojik malzemeler non-lineer ve anizotropik olup homojenlik ve elastiklik göstermezler.

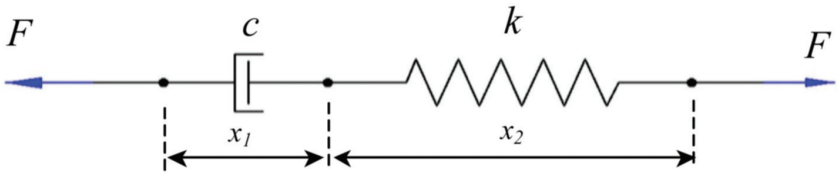
Viskoelastisite: Sünme, gerilme gevşemesi ve histeresis gibi özellikler gösteren malzemeler viskoelastik malzemelerdir. Viskoelastisite biyomekanik malzemelerde görülen önemli bir mekanik özelliktir. Kemik, kas, tendon ve ligament gibi dokular mühendislik malzemelerinden farklı olarak viskoelastik davranış gösterirler.

Bir cisim aniden çekilip, belli bir miktarda şekil değişimi meydana geldikten sonra bu şekil değişimi sabit tutulursa, gerilme-genleme grafiğinde buna karşılık gelen gerilme miktarı zamanla azalır. Bu olaya gerilme gevşemesi (stress relaxation) denir. Benzer şekilde bir cisme kuvvet uygulanıp gerilme oluşturulur ve bu gerilme sabit tutulursa, bu gerilmeye karşılık gelen şekil değişimi sabit kalmaz ve cisim deforme olmaya devam eder. Bu duruma da sünme veya sürünme (creep) denir. Tekrarlı yüklemelere maruz kalan elastik cisimlerin yük uygulanması ve kaldırılması sırasındaki gerilme-genleme ilişkisi aynı eğri üzerinde gerçekleşirken (Şekil 16a), viskoelastik cisimlerde yükün uygulanması ve kaldırılması sonucunda oluşan gerilme-genleme eğrisi farklılık göstermektedir (Şekil 16b). Bu durum histerisis olarak adlandırılırdır. İki eğri arasında kalan alan (Şekil 16b), sönümlenen (ısıya dönüşen) enerjiye eşittir (9).



Şekil 16. a) Elastik ve b) viskoelastik malzemeler için gerilme-genleme grafikleri.

Viskoelastik malzemelerin davranışlarını karakterize edebilmek için bazı mekanik modeller geliştirilmiştir. Bu kitap kapsamında Maxwell'in viskoelastik model ele alınmıştır (Şekil 17). Önerilen modellerin kapsamlı incelemesi Fung'ın (1993) çalışmasında bulunmaktadır.



Şekil 17. Maxwell viskoelastik model.

Şekilde görülen Maxwell mekanik modelinde viskoelastik yapı, bir yay ve bir sönümleme elemanı (damper) ile tanımlanmış ve sisteme F kuvveti uygulanmıştır. Bu fiziksel modelin matematiksel denklemi aşağıdaki gibi elde edilebilir.

Yay ve sönüm elemanı birbirlerine seri bağlı oldukları için üzerlerine etki eden kuvvet değeri her ikisi için de aynı olacaktır. Dolayısıyla

$F = cx_1 = kx_2$ şeklinde olacaktır. x_1 ve x_2 sırasıyla sönüm ve yay elemanının zamana bağlı yer değişimleridir (displacement).

Modelin toplam yerdeğişimi $x = x_1 + x_2$'dir. Bu bağıntının birinci mertebeden zamana göre türevi hesaplanırsa

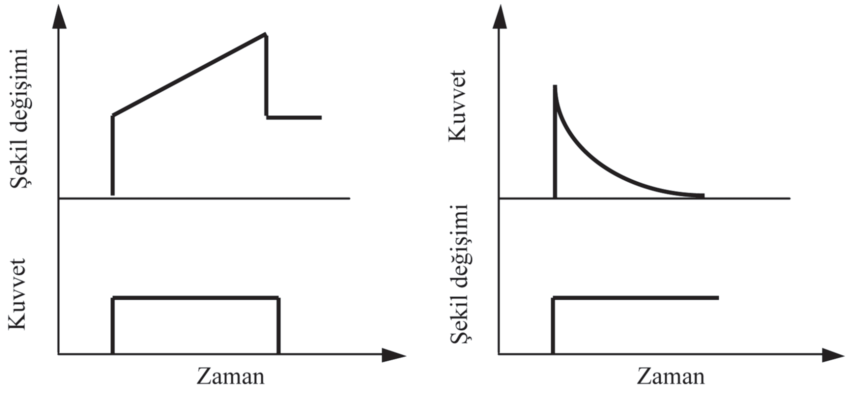
$x = x_1 + x_2$ elde edilir. Bu denklemde x_1 yerine $\frac{F}{c}$, yerine $\frac{\dot{F}}{k}$ yazılacak olursa

$$\dot{x} = \frac{F}{c} + \frac{\dot{F}}{k}$$

elde edilir. Böylece modelin toplam yerdeğişimi x ve üzerine etkiyen kuvvet F arasındaki matematiksel ilişki kurulmuş olur.

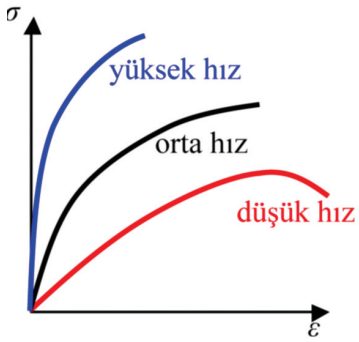
Yukarıda elde edilen diferansiyel denklem çözülerek, Maxwell viskoelastik modelde meydana gelen sünme (Şekil 18a) ve gerilme gevşemesi (Şekil 18) fonksiyonları elde edilmiş ve bu fonksiyonların grafikleri Şekil 18'de verilmiştir. Diferansiyel denklemin çözümünde

sünme durumu için kuvvetin, gerilme gevşemesi için de şekil değişiminin sabit olduğu kabul edilmiştir. Fiziksel modelde, kuvvet sabitken şekil değişiminin artmaya devam edip kuvvet kalktıktan sonra da eski haline gelmemesi (Şekil 18a) ve şekil değişimi sabit tutulmasına rağmen kuvvetin zamanla azalması (Şekil 18b) viskoelastik davranışın tipik özellikleridir.



Şekil 18. Maxwell modelinde meydana gelen a) sünme ve b) gerilme gevşemesi fonksiyonları.

Viskoelastik malzemelerde oluşan gerilme, yükün uygulama hızıyla yakından ilişkilidir (Şekil 19). Şekil 17'de görüleceği üzere, uygulanan yükün hızı arttıkça fiziksel sistemin göstereceği direnç de fazla olacaktır. Viskoelastik davranış aynı zamanda malzemenin yüke verdiği tepkinin zamana bağlı olduğunu da ifade eder.



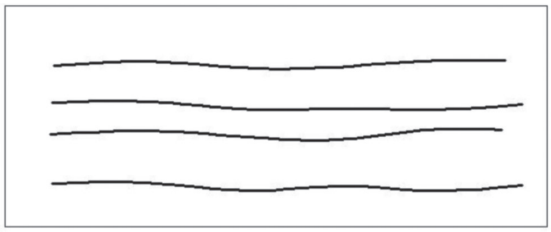
Şekil 19. Farklı hızlarda uygulanan kuvvetler sonucunda viskoelastik bir malzemenin göstereceği gerilme-genleme davranışı.

Kemiklerin Mekanik Özellikleri

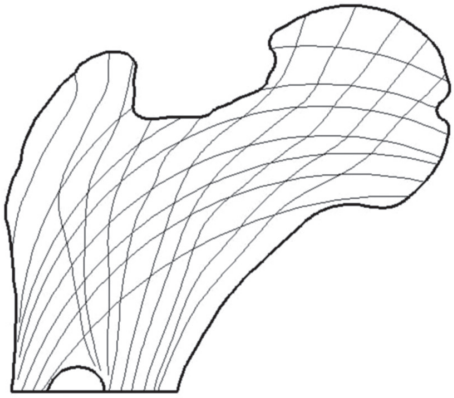
İskelet sisteminin temel elemanı olan kemikler, spesifik malzeme özellikleri ve mekanik karakteristikleri sayesinde diğer organ ve sistemlerin sağlıklı biçimde çalışmasını ve dış etkilere karşı korunmasını sağlarlar.

Mikroskobik ölçekte bakıldığında insan kemiklerinin organik ve inorganik yapılardan oluştuğu görülür. İnorganik yapılar, kalsiyum ve fosfat gibi mineraller olup, kemiklerin ihtiyaç duyduğu sertliği ve dayanıklılığı sağlarlar. Organik yapı ise kolajenden oluşur ve kemiklere esneklik kazandırır. Mineraller yani inorganik bileşenler kemikte organik bileşenlerin içinde uzanmış iplikçikler şeklinde bulunurlar (Şekil 20). Kemiğin içyapısı içinde uzun demir çubuklar barındıran beton kolonlara benzetilebilir.

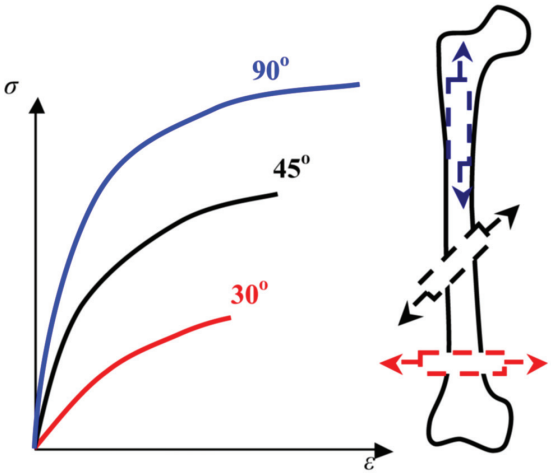
İnorganik iplikçiklere fiber, organik maddelere yani kolajenlere de matris denir (Şekil 21). Kemiğin fiber–matris şeklindeki yapısı ona anizotropik özellik, yani farklı doğrultularda farklı mekanik özellikler gösterme özelliği kazandırır (Şekil 22).



Şekil 20. Kemiğin iç yapısının şematik gösterimi.



Şekil 21. Bir yetişkinin femur başının frontal düzlemdeki kesiti.



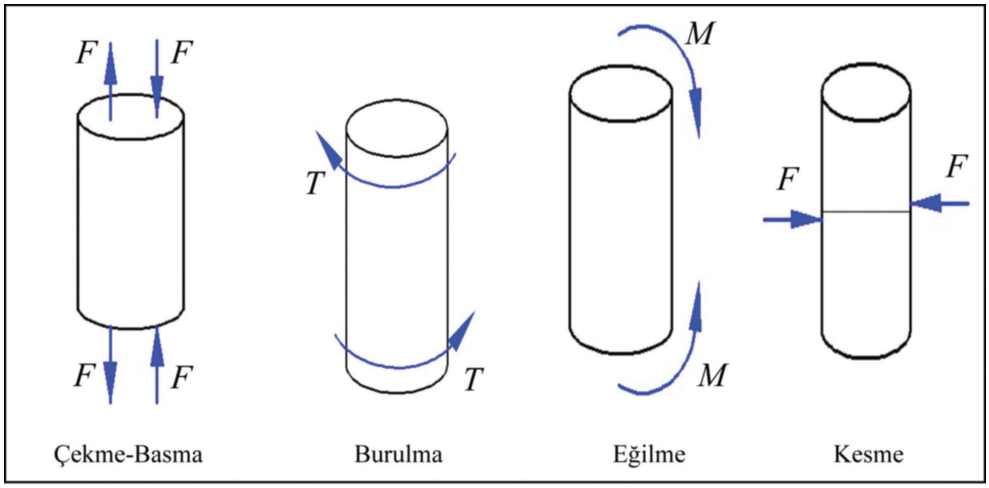
Şekil 22. Femur kemiğinin farklı doğrultularda uygulanan çekme kuvvetlerine karşı gösterdiği anizotropik davranış.

Kemikler çeşitli vücut hareketleri sırasında farklı tip zorlanmalara maruz kalırlar. Bunlar çekme, basma, eğme, kesme, burulma ve bunların bileşiminden oluşabilen yükleme türleridir (Şekil 23).

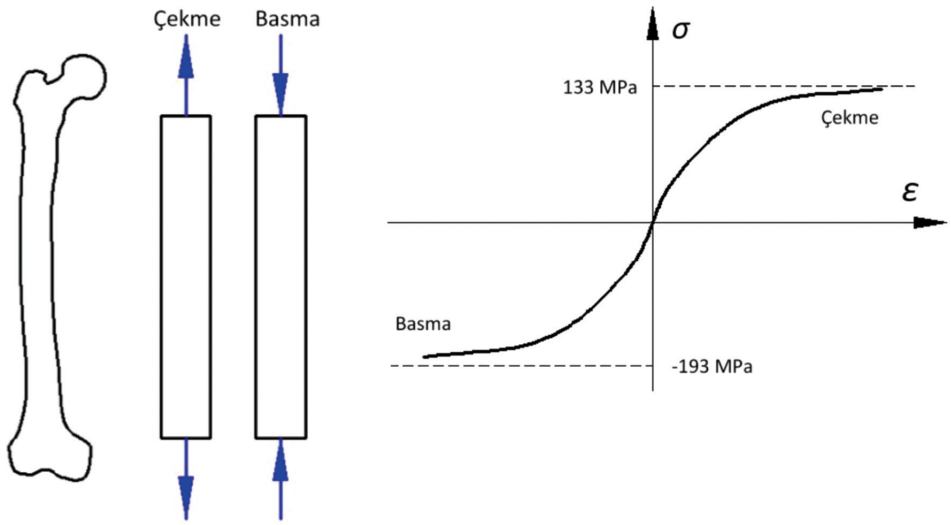
Kemiklerin üzerine etkiyen zorlanmaların biçimleri de mekanik davranışlarını etkiler. İnsan vücudunda özellikle uzun kemikler için basma dayanımları çekme dayanımlarından daha yüksektir (Şekil 24). İnsan vücudundaki kemikler özellikle basma yüklerine karşı oldukça yüksek, çekmeye karşılık orta seviyede ve kesme doğrultusundaki yüklere karşı da düşük mukavemet gösterirler.

Kemiğin yapısına mikroskobik olarak yaklaşıldığında ise mekanik karakterleri birbirinden çok farklı iki yapı görülür. Bunlar kortikal ve trabeküler kemik dokularıdır. Kortikal kemik yoğun ve sert bir yapıya sahip olup, kemiklerin dış yüzeyini kaplar. Trabeküler kemik ise bu sert dış yapının içinde bulunan yumuşak ve daha düşük yoğunluğa sahip kısımdır. Bu iki bileşen mekanik açıdan farklı özellik gösterirler. Şekilde görüldüğü gibi gerilme-genleme diyagramında kortikal kemik daha gevrek bir yapı gösterirken, trabeküler kemikse yüksek miktarda şekil değişimine müsaade etmektedir (Şekil 25).

İnsan kemikleri bir bütün olarak ele alındığında ise mühendislik malzemelerinde farklı davranan bir yapıya sahip olduğu anlaşılır (Şekil 26). Metaller elastik bölgede en yüksek eğime sahip olduklarından nispeten daha rijit malzemelerdir. Metallerin plastik bölgedeki davranış bakımından da kopmadan önce önemli miktarda şekil değişimi gösterdiği gözlemlenmektedir. Cam ise gevrek



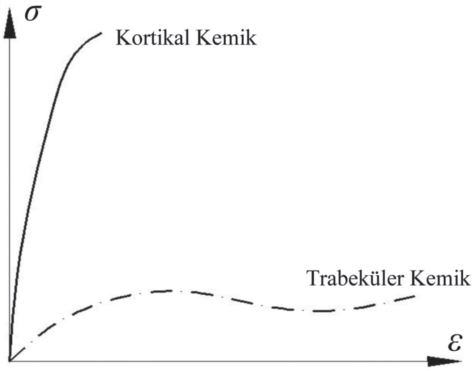
Şekil 23. Kemiklerin maruz kaldığı yükleme tipleri.



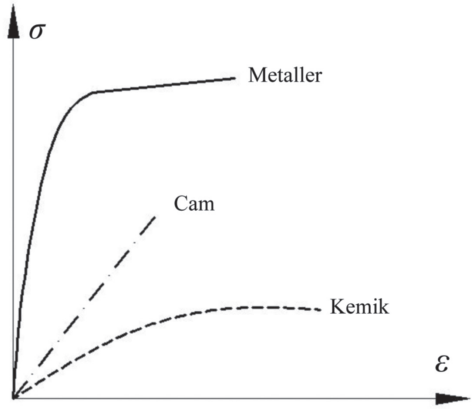
Şekil 24. Femur için boyuna çekme ve basma dayanımları.

bir malzeme olup lineer elastik özellik gösterir ve kopmadan önce çok az miktarda deforme olur. Kortikal ve trabeküler yapılar sayesinde kemik, yükleme sırasında elastik bölgede akma gösterir. Bu da kemiğin lineer elastik olmadığını, viskoelastik bir özelliğe sahip olduğunu gösterir.

Kemiğin mekanik davranışı etkileyen bir diğer etken de yaştır. Zamanla kemiklerde kütle kaybı meydana gelir ve kemik dayanımı düşer (Şekil 27).

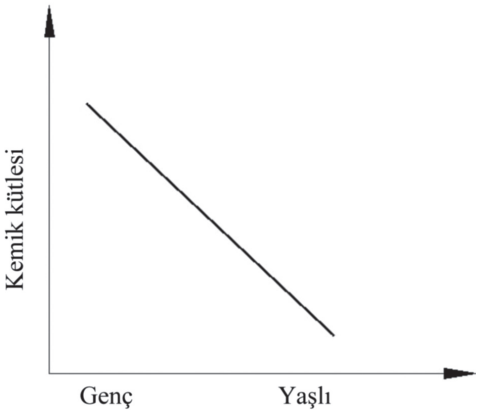


Şekil 25. Kortikal ve trabeküler kemik yapılarının gerilme–genleme eğrileri



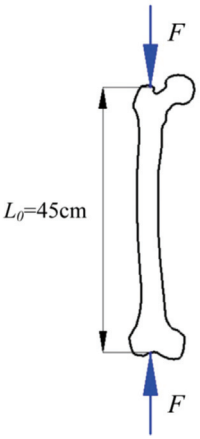
Şekil 26. Farklı malzemeler için gerilme-genleme eğrileri (10).

Kemiklerle beraber çalışan kasların hareketleri, kemiğin geometrisi, kesit alanı, yorulma gibi faktörler de kemiğin mekanik davranışına etki eden diğer faktörlerdir.

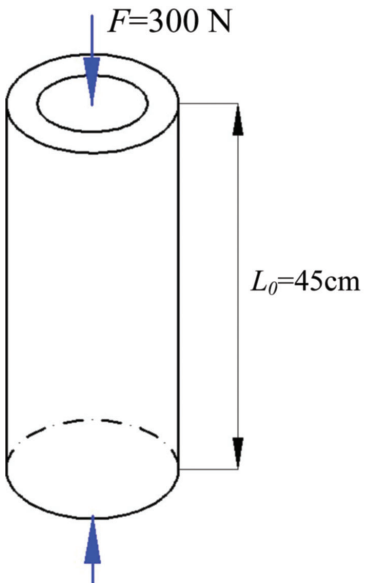


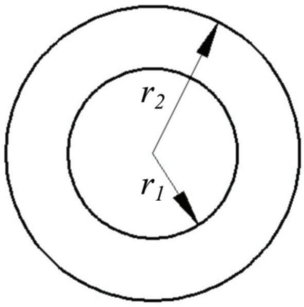
Şekil 27. Kemik kütlesinin yaşa göre değişimi (10).

Örnek: Şekildeki femur kemiğine basma testi uygulanmaktadır. Kemik basma kuvvetleri neticesinde kırılana kadar zorlanmaktadır. Kemiğin en dar kesit bölgesinin dış çapı 4cm, iç çapı ise 2 cm'dir. F=300N büyüklüğünde bir kuvvet uygulandığı durumda kemikte oluşan gerilme değerini ve boyca kısalmayı hesaplayınız. Kemiğin mekanik olarak basma testine maruz kalmadan önceki boyu 45cm, kortikal kemiğin elastik modülü 15 GPa'dır.



Çözüm: Kemikler temelde iki farklı yapıdan oluşmaktadır. Kemiğin iç yapısı trabeküler kemik olarak adlandırılan yumuşak ve düşük mukavemetli kısımda oluşurken, dış kısmı ise daha yüksek mukavemetli kortikal kemik yapısından oluşur. Kemiğin basma yüklemesi sırasında göstereceği mukavemetin önemli bir kısmı kortikal kemik tarafından sağlanacağından dolayı, kemik içi boş bir silindirik yapı olarak ele alınıp çözüm yapılabilir.





r_1=2 cm

r_2=4 cm

Silindirin kesit alanı, A

$$A = \pi r_2^2 - \pi r_1^2 = \pi(r_2^2 - r_1^2) = \pi(4^2 - 2^2)$$

$A = 37,7$ cm^2 = 3770 mm^2

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{300\,\text{N}}{3770\ \text{mm}^2} = 0,07958\,\text{MPa}$$

$$\sigma = E\,\varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{0,07958}{15000} = 5,03x10^{-6}$$

δ boyca kısalmayı göstermek üzere

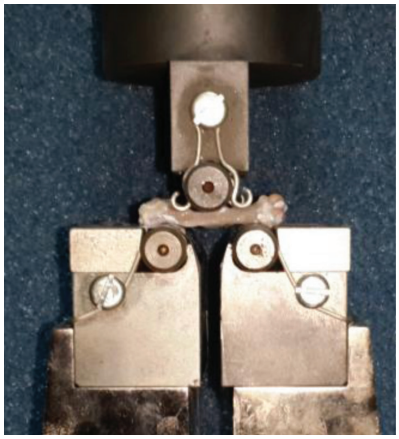
$$\varepsilon = \frac{\delta}{L_0}$$

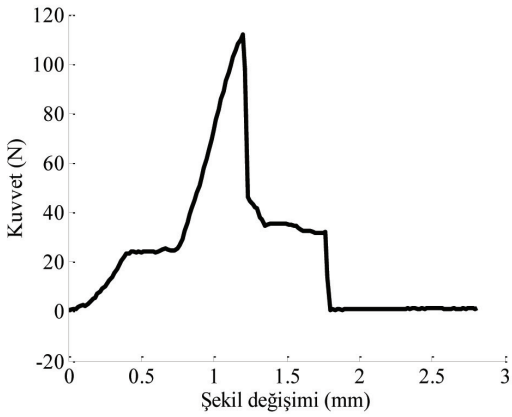
$$\delta = \varepsilon\,L_0 = (5,03x10^{-6}) \times (450\,\text{mm})$$

δ = 0.0023 mm boyca kısalma meydana gelmiştir.

Örnek Vaka Çalışması: Üç noktadan eğme testi

Üç noktadan eğme testi, cisimlere üç ayrı noktadan sabit bir hızla yük uygulanarak dayanımlarının ölçüldüğü testtir. Şekil 28a'da test için hazırlanan deneysel düzenek, Şekil 28b de ise test sonucunda elde edilen kuvvet-şekil değişimi grafiği verilmiştir. Grafikten de anlaşılacağı üzere kemiğin dayanabileceği maksimum kuvvet yaklaşık 118N ve bu kuvvet değerine karşılık ölçülen maksimum şekil değişimi değeri de yaklaşık 1,2mm ölçülmüştür. Bu noktadan itibaren kemik kırılmaya başlamış ve tam olarak kemiğin iki parçaya ayrılması ise yaklaşık 1,8mm civarında gerçekleşmiştir.

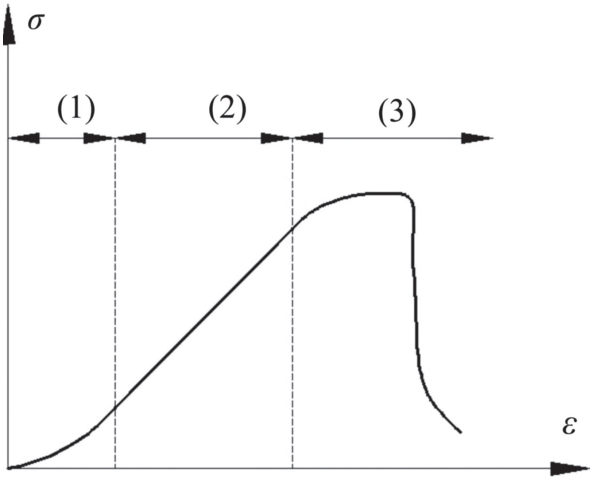




Şekil 28. a) Sıçanlara ait femur kemiklerine uygulana üç noktadan eğme testi. b) Test sonucunda elde edilen kuvvet-şekil değişimi grafiği.

Tendonların Mekanik Özellikleri

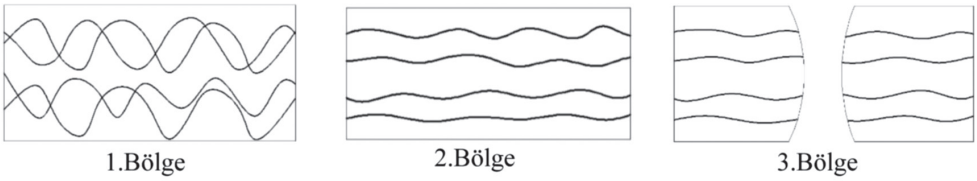
Tendonlar, kaslarda üretilen kuvveti kemiklere aktararak hem eklem hareketlerine yardımcı olurlar, hem de vücudun duruşu için gerekli stabiliteyi sağlar. Tendonlar da kemikler gibi viskoelastik malzemelerdir. Kasların kasılması sırasında ortaya çıkan yüksek çekme kuvvetlerine maruz kalır. Tendonlar kasların kasılması sırasında ortaya çıkan yüksek çekme kuvvetlerine dayanabilecek kapasitededirler ve aynı zamanda yüksek miktarda enerjiyi hareket sırasında depolayabilirler. Tendonların da mekanik özellikleri çekme testi ile belirlenebilir. Tendonlara uygulanan çekme testleri sonucunda Şekil 29'deki gibi bir gerilme-genleme grafiği elde edilir.



Şekil 29. Çekme testi sonucunda tendona ait elde edilen gerilme- genleme grafiği.

Gerilme-genleme grafiğinde 3 ayrı bölge oluştuğu görülür. Bunlar;
(1). Bölge: Uç (toe) bölgesi
(2). Bölge: Lineer (elastik) bölge
(3). Bölge: Akma ve kopma bölgesi

(1). bölge fiberlerin henüz neredeyse başlangıç pozisyonunda yani konkav şeklinde olduğu durumu ifade eder. Yani uygulanan kuvvet düşük olduğu için henüz fiberler boyuna uzamamışlardır. Uygulanan kuvvet arttıkça fiberler çekilir ve daha düz hale gelirler. Bu da gerilme-genleme grafiğinde (2). bölgenin (lineer-elastik bölge) oluşmasına olanak verir. Kuvvetin daha da artması ile birlikte (3). bölgeye (kopma bölgesi) geçilir. Bu bölgede öncelikle tendon yapısında mikro ölçekte kalıcı hasar meydana gelir, yani tendonların lifleri gruplar halinde kopmaya başlar. Yükün artırılmaya devam edilmesiyle mikro hasarlar büyür ve tendon kopar (Şekil 30).



Şekil 30. Gerilme-genleme grafiğinde bölgelere göre tendon yapısının değişimi.

Tendonlar için elastik modül *E* 2-4 Gpa arasında değişirken, dayanabilcekleri maksimum çekme gerilmesi, 20-35 MPa değerlerinde olur. Tendonlar viskoelastik malzemelerdir; dolayısıyla histerisis, sünme ve kuvvet genleşmesi özellikleri gösterirler.

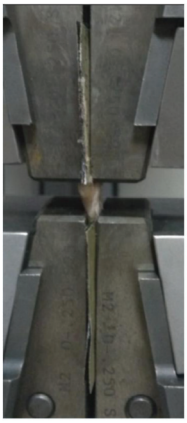
Tendonların mekanik özelliklerini etkileyen önemli faktörler vardır. Yaşlanma etkisi açısından değerlendirildiğinde, tendonların yaklaşık 20 yaşına çekme mukavemeti sürekli artar; ancak yaşın ilerlemesi ile hem çekme dayanımında hem de rijitlikte önemli bir azalma söz konusu olur. Çünkü tendonların içerdiği tenocyte hücreleri ve su miktarında azalma ortaya çıkar. Ayrıca spor ve fiziksel aktivite ile tendonların kesit alanlarında büyüme meydana gelir ve çekme mukavemetleri artar. Şeker hastalığı, bağ dokusu bozuklukları, hamilelik vb. etkenler de tendonların mekanik davranışlarını etkileyen diğer faktörlerdir.

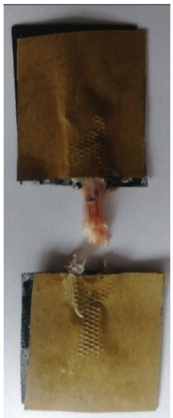
Örnek vaka çalışması: Sıçan aşil tendonlarına uygulanan çekme testi

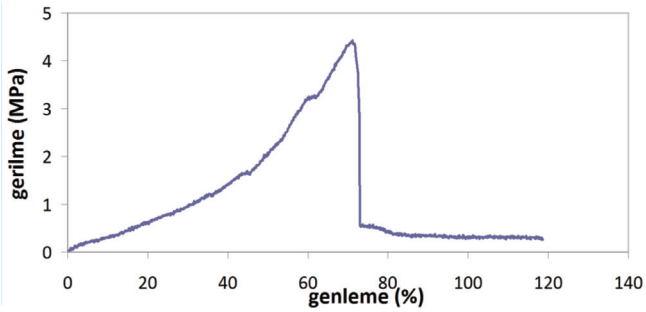
Bu örnek vakada, sıçanların aşil tendonlarında kesiler oluşturulmuş ve bu kesiler çeşitli farmakolojik yöntemlerle tedavi edilmeye çalışılmıştır. Yapılan tedavilerin tendonlar üzerindeki sonuçları hem histopatolojik hem de biyomekanik açıdan değerlendirilmiştir.

Tedavi edilen tendonların biyomekanik değerlendirmesi, tendonlara uygulanan çekme deneyi sonrasında elde edilen veriler doğrultusunda yapılmıştır. Şekil 31a'da test cihazına bağlanan tendon, Şekil 31b'de test sonrasında kopma gerçekleşen tendon, Şekil 31c'de ise elde edilen kuvvet-uzama verilerinin grafiği gösterilmiştir.

Şekil 31c'den de anlaşılacağı üzere tendonun maksimum kopma mukavemeti yaklaşık 4.5MPa, maksimum genleme değeri de %72 seviyelerinde gözlenmektedir.







Şekil 31. a) Çekme testi uygulayabilmek için test cihazının çenelerine bağlanmış sıçan aşil tendonu. b) Test sonucunda kopan tendon. c) Elde edilen gerilme-genleme eğrisi.

Kasların Mekanik Özellikleri

Kemik ya da tendon dokularından farklı olarak kaslar kuvvet üreten yapılardır. Dolayısıyla kasların mekanik özelliklerinin kapsamlı biçimde ele alınabilmesi için kasların kuvvet üretimini etkileyen kas uzunluğu, kas hızı, lif yapısı, kesit alanı, ve aktivasyon seviyesi gibi fizyolojik parametrelerin de dikkate alınması gerekir. Ancak kasların kuvvet üretim mekanizması ayrı bir bölümde ele alınmayı hak eden kapsamlı ve detaylı bir konudur. Ancak yumuşak ve sert doku mekaniğini ele alan bu bölümün bütünlüğünü korumak adına kasların mekanik özellikleri de, dar bir kapsamda da olsa, ele alınacaktır.

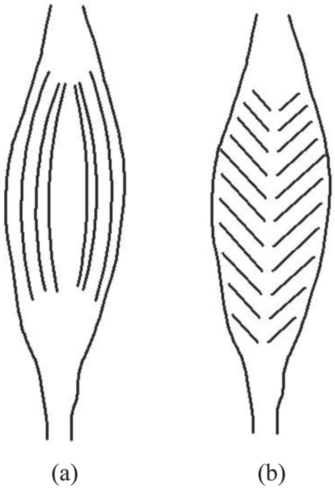
Kasların başlıca işlevi, canlıların hareketi için gerekli olan kuvvet üretimini gerçekleştirmektir. Bu yüzden kasların mekanik özelliklerini ve kuvvet üretim mekanizmasının çalışma ve karar verme prensiplerini anlamak, hastalık veya travmalardan dolayı meydana gelen motor fonksiyon kayıplarının yeniden kazanılması açısından önemlidir.

İnsan vücudunda kaslar ağırlık bakımından yaklaşık %40-%45 oranında yer tutarlar. Kasların en küçük birimleri yüzlerce çekirdek barındıran, genişlikleri 10-100 mm ve uzunlukları 1-30 cm arasında değişen kas lifleridir (fiber). Kas lifleri ise myofibril olarak adlandırılan yapılardan meydana gelirler. Myofibril ise başka temel yapılar içermekle birlikte aktin, miyozin ve titin gibi protein moleküllerinden oluşur.

Kaslarda, tendon ve kemik doku gibi viskoelastik özellik gösterirler. Literatürde, kasların makro seviyedeki davranışlarını karakterize etmek üzere çok sayıda kas modeli önerisi bulunmaktadır (11). Bunlar arasında en popüler model Hill tipi kas modelidir (biyomekanik çalışmalarda sıklıkla

kullanılan bu tip kas modellerinin kapsamlı anlatımı için bakınız: Fung, 1993).

Kasların ürettiği kuvvetin büyüklüğünü etkileyen önemli faktörlerden bir tanesi, kas hücrelerinin kas içerisindeki dağılımlarıdır. Kas lifleri kasın uzun ekseni (longitudinal) doğrultusunda birbirlerine paralel olacak şekilde dağılım gösterebilecekleri gibi (paralel lif yapısı) (Şekil 32a), bu eksene eğik eksenler doğrultusunda da (pennated muscle) yer alabilirler (Şekil 32b). Pennated lif yapısına sahip kaslar daha fazla lif barındırdığından, paralel lif barındıran kaslardan daha fazla kuvvet üretirler.

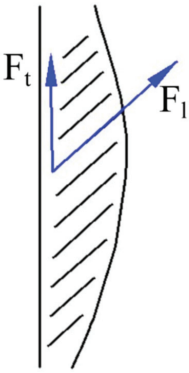


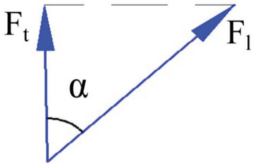
Şekil 32. Farklı doğrultudaki kas liflerinin şematik gösterimi a) Paralel kas lifleri b) Tendon doğrultusu ile aralarında pennasyon açısı bulunan kas lifleri.

Örnek: Şekilde görülen kas yapısında pennated liflerin longitudinal eksen ile yaptığı açı α (pennasyon açısı) ile ifade edilmektedir. Kas liflerinde oluşan kuvvet 15 N ve $\alpha = 45^o$ için tendona etkiyen kuvveti hesaplayınız.

Çözüm

F_l = Kas liflerinde üretilen kuvvet
F_t = Tendona iletilen kuvvet
$\alpha = 45^o$
olmak üzere;





$F_l.\cos\alpha = F_t$
$15\cos 45 = F_t$
$F_t = 10{,}6$ N olarak bulunur.

Örnek: Bir üst kol fleksör kasın kesit alanı $A = 8\ cm^2$ dir ve izometrik kasılma sırasında kasta oluşan gerilme $\sigma = 0{,}4$MPa'dır. Kas ile dirsek eklemi arasındaki dik uzaklık (moment kolu) $d = 3$ cm ise dirsek ekleminde bu kasın ürettiği kuvvetten kaynaklanan moment değerini hesaplayınız.

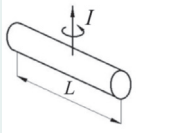
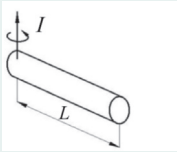
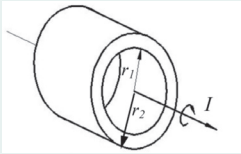
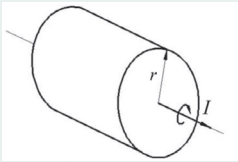
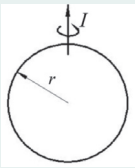
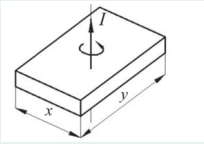
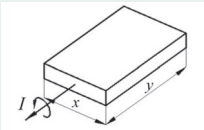
$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$F = \sigma A = (0,4\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}) \times (800\,\mathrm{mm}^2)$$

$$F = 320\,\mathrm{N}$$

$$M = F\,d = 320 \times 0,03 = 9,6\,\mathrm{Nm}$$

TABLO 3. Kütle Atalet Momentleri Tablosu: Tablodaki tüm cisimlerin kütlesi *M*'dir.

Geometri Tipi	Şekil	Formül
1. Uzun silindirik kesitli çubuk Merkezinden geçen eksene göre atalet momenti		$I = \frac{1}{12} ML^2$
2. Uzun silindirik kesitli çubuk Bir ucundan geçen eksene göre atalet momenti		$I = \frac{1}{3} ML^2$
3. İçi Boş Silindir Merkezi boyunca geçen eksene göre atalet momenti		$I = \frac{1}{2} M (r_1^2 + r_2^2)$
4. İçi dolu silindir Merkezi boyunca geçen eksene göre atalet momenti		$I = \frac{1}{2} Mr^2$
5. İçi dolu küre Merkezinden geçen eksene göre atalet momenti		$I = \frac{2}{5} Mr^2$
6. İçi boş küre Merkezinden geçen eksene göre atalet momenti		$I = \frac{2}{3} Mr^2$
7. Düz levha Yüzeyine dik merkez eksene göre atalet momenti		$I = \frac{1}{2} M (x^2 + y^2)$
8. Düz Levha Yüzeyine paralel merkez eksene göre atalet momenti		$I = \frac{1}{2} Mx^2$

Kaynaklar

1. Alexander, R. M., 2003, Locomotion of Animals, Princeton University Press, Princeton and Oxford.
2. Akçalı, İ. D., Gülşen, M., Ün, K., 2009, Kas-iskelet sistemi biyomekaniği,Ortopedia, Adana, Türkiye.
3. Robertson, D. G. E., Caldwell, G. E., Hamill, J., Kamen, G., Whittlesey, S. N., 2013, Research methods in biomechanics, Human Kinetics, 2nd edition.
4. Hibbeler, R., C., 1997, Engineering Mechanics: Dynamics, Prentice Hall, 8th Edition.
5. Wan Y., Schimmels J.M., A simple model that captures the essential dynamics of a seated human exposed to whole body vibration, Bioeng. Div. ASME, 31:333–334, 1995.
6. Arslan Y.Z., "Experimental assessment of lumped-parameter human body models exposed to whole body vibration", Journal of Mechanics in Medicine And Biology, vol.15, pp.1550023-1-1550023-13, 2015.
7. Gere, J., Timoshenko, S. P., 1990, Mechanics of Materials, PWS-Kent, Boston, 3rd edition.
8. Hibbeler, R., C., 2010, Mechanics of Materials, Prentice Hall, 8th Edition.
9. Fung, Y.C., 1993, Biomechanics mechanical properties of living tissues, New York, Springer.
10. Nordin M., Frankel, V.H., 2012, Basic Biomechanics of the Musculoskeletal System, LWW; Fourth, North American Edition.
11. Epstein M., Herzog W., 1998, Theoretical models of skeletal muscle: Biological and mathematical considerations, Wiley & Sons, New York.